$\frac{k}{h} = tanj.\ s$ se haga $h = 0$, $k = 0$. I siendo en (7).. $\frac{k}{h} = -\frac{A}{B} - \frac{ACh}{B} - \frac{ADk}{B} - \ldots$&c, resulta en tal suposicion $\frac{k}{h} = tanj.\ t = a = -\frac{A}{B}$

Llevado á (6) este valor, la ecuacion jeneral buscada es .. $y - y' = -\frac{A}{B}(x - x')$; ó bien; .... $A(x - x') + B(y - y') = 0$.

Dará la operacion los valores de A i B; pero sin necesidad de ella se advierte como antes que son las *derivadas parciales* con respecto á x é y deducidas de la ecuacion de la curva, reemplazando x por x', y por y'.

El procedimiento simplificado que por lo dicho se obtiene es: «hacer $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuacion de la curva; sacar de la trasformada el conjunto de los términos de primer grado en h i k é igualarlo á *cero*; sustituir luego ah por k, con lo cual se suprimirá tambien h que aparece de factor comun; i despejar por último a que fija la direccion de la tanjente.»

Sea la curva ... $y^2 + 2xy - 2y - x = 0$ .. (8)

$x = x' + h;\ y = y' + k \}\ (y' + k)^2 + 2(x' + h)(y' + k) - 2(y' + k) - x' - h = 0.$

Conjunto de los términos de primer grado en h i k; .. $2y'k + 2x'k + 2y'h - 2k - h = 0$

$k = ah \}$ .. $h(2ay' + 2ax' + 2y' - 2a - 1) = 0$; .. $a = \frac{1 - 2y'}{2(y' + x' - 1)}$; valor que sustituido en (6) da; ... $(2y' + 2x' - 2)(y - y') + (2y' - 1)(x - x') = 0$; lo mismo que por el otro método.

Para el punto (1, 1) que pertenece á la curva, pues que sus coordenadas satisfacen á la ecuacion (8), será .. $a = -\frac{1}{2}$; i la tanjente .. $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$; ó bien .. $2y + x - 3 = 0$.

Tanjentes á las curvas del 2.° *grado* — Método particular.

Sean α, $\mathfrak{C}$, las coordenadas de un punto cualquiera, para tirar de él una tanjente.

Ecuacion de cualquier recta que pase por ese punto; .. $y - \mathfrak{C} = a(x - \alpha)$ .. (9)

Tomando en (9) el valor de y, é introduciéndolo en la ecuacion de la curva, resultará una ecuacion de 2.° grado en x; .. $Px^2 + Qx + R = 0$ .. (10); siendo P, Q, R, funciones de a.

Resuelta (10) da; ... $x = -\frac{Q}{2P} \pm \frac{1}{2P}\sqrt{(Q^2 - 4PR)}$; i sus dos raices son las abscisas de los dos puntos de interseccion de la recta (9) con la curva propuesta: reales i desiguales si $Q^2 - 4PR > 0$.

Haciendo $Q^2 - 4PR = 0$, se espresa que las dos abscisas se confunden en una sola, i tambien se confundirán las ordenadas correspondientes: los dos puntos de interseccion se han confundido pues en uno solo, i la recta es tanjente. El valor de a que se saque de $Q^2 - 4PR = 0$, dará sustituido en (9) la ecuacion de la tanjente tirada por el punto $(\alpha, \mathfrak{C})$.

Tendrá en jeneral dos valores a, que darán dos tanjentes si son reales i desiguales, i ninguna si son imajinarios; deduciéndose en este último caso ser tal la posicion del punto dado, por ejemplo ácia la *concavidad* de la curva, que por él no es posible tirar tanjentes. Cuando el punto $(\alpha, \mathfrak{C})$ esté situado en la curva, los dos valores de a se reducirán á uno solo, i la tanjente será única.

LECCION 16.

Teoría de las tanjentes.—*(Conclusion.)*

Subtanjente—Llámase así la distancia pq (Fig. 54) entre el pie de la ordenada del punto m de contacto de una tanjente, i la interseccion q de la tanjente con el eje de las abscisas; ó sea «la distancia entre el pie de la ordenada i el pie de la tanjente.»

Siendo $x = Oq$ la abscisa del pie de la tanjente, i $x' = Op$ la del punto de contacto, se tiene; ... subtanjente $pq = Oq - Op = x - x'$. Debe pues hallarse x en la ecuacion de la tanjente haciendo $y = 0$, i restarse de su valor x': las dos operaciones se ejecutan á un tiempo.

Ecuacion jeneral de la tanjente mq (Lecciones 14 i 15); $..A(x-x')+B(y-y')=0$

$y=0\ \}\ A(x-x')-By'=0$; $..x-x'=\frac{By'}{A}$ (1). Valor jeneral de la subtanjente pq; supuesto que, por la condicion $y=0$ representa ya x la abscisa Oq.

Sea para la curva $..a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Ecuacion jral. de la tanjente; $..a^2y'(y-y')+b^2x'(x-x')=0$.

$y=0\ \}$ Valor jeneral de la subtanjente; $..x-x'=\frac{a^2y'^2}{b^2x'}=\frac{a^2b^2-b^2x'^2}{b^2x'}=\frac{a^2-x'^2}{x'}$.. (2)

La sustitucion que en este ejemplo ha dado la subtanjente en funcion de solo la abscisa del punto de contacto se funda en que, siendo de la curva el punto (x', y') de contacto, sus coordenadas satisfacen á la ecuacion propuesta.

Tanjentes comunes á dos curvas—Trátase de hallar la ecuacion de la tanjente comun à dos curvas dadas, $f(x,y)=0$, $f'(x,y)=0$.

Designando por x', y', x'', y'', las coordenadas desconocidas de los dos puntos de contacto de la tanjente comun, esta tanjente, con respecto á cada curva en particular, tendrá por ecuaciones; ...

$$A(x-x')+B(y-y')=0;\ ..A'(x-x'')+B'(y-y'')=0$$

O bien; $...x+\frac{By}{A}=\frac{Ax'+By'}{A}$; (3); $..x+\frac{B'y}{A'}=\frac{A'x''+B'y''}{A'}$..(4)

Téngase presente que A, B, son funciones de x', y'; i A', B', funciones de x'', y''.

Como la tanjente comun es recta única, las dos ecuaciones (3) i (4) que la representan son respectivamente *idénticas*, é iguales por tanto en valor los coeficientes de y en ellas, i los términos independientes, en que se hallan contenidas las cuatro incógnitas x', y', x'', y''.

Obtiénense pues estas dos ecuaciones; $..\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}$; $..\frac{Ax'+By'}{A}=\frac{A'x''+B'y''}{A'}$

I estas otras dos; $..f(x',y')=0$; $..f'(x'',y'')=0$; porque cada punto de contacto está situado en diferente curva, á cuya ecuacion satisfacen sus coordenadas.

La cuestion es pues determinada, habiendo cuatro ecuaciones, que darán los valores de las cuatro incógnitas; i la ecuacion especial de la tanjente comun se obtendrá llevando á (3) los valores de x', y', ó llevando á (4) los de x'', y'', indiferentemente.

El número de valores reales correlativos de x', y', x'', y'', indicará cuantas tanjentes comunes pueden tirarse, segun las posiciones relativas de las curvas propuestas. Así, por ejemplo, para dos círculos resultarán en jeneral 4 tanjentes; que se reducirán á 3, á 2, à una ó á ninguna, segun sea que se toquen esteriormente, ó se corten, ó se toquen interiormente, ó estén contenidos uno en otro sin tocarse.

Contacto de curvas—1.° Si dos curvas, $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, se tocan en determinado punto (x', y'), deben tener una tanjente comun en el punto mismo.

Esta tanjente, con respecto á cada curva en particular, tiene por ecuaciones;

$$A(x-x')+B(y-y')=0;\ A'(x-x')+B'(y-y')=0;\ \text{ó bien}..x+\frac{By}{A}=\frac{Ax'+By'}{A}..(5);$$

$$x+\frac{B'y}{A'}=\frac{A'x'+B'y'}{A'}..(6)$$

Los cuatro coeficientes, A, B, A', B', son funciones de x', y', i de las constantes de las dos ecuaciones.

Son (5) i (6) ecuaciones respectivamente idénticas, por representar una misma recta; pero ahora, sea que se igualen los coeficientes de y, ó los términos independientes, solo se obtiene una misma ecuacion de condicion, á saber; $...\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}$; funcion de las coordenadas (x', y') conocidas, i de las constantes de las ecuaciones de las dos curvas.

Siendo particularizada la curva $f(x,y)=0$, vgr, una elipse ó parábola determinada, las constantes ó coeficientes de su ecuacion son conocidas: i no siéndolo en todo ú en parte las de la ecuacion $F(x,y)=0$, que en tal caso representará la *especie* de esta curva, podrá particularizársela si solo hai indeterminadas dos constantes, combinando para hallar sus valores las dos ecuaciones $...\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}$, $F(x', y')=0$. Si falta por determinar mayor número de las constantes de la 2.ª curva, entònces podrán pasar por el punto

(x', y') infinitas curvas de esta especie, tanjentes á la $f(x, y) = 0$, á menos que se agreguen las condiciones compatibles necesarias para particularizar una.

Supóngase que $F(x, y) = 0$, representa en jeneral un círculo; .. $(x - \alpha)^2 + (y - \mathfrak{G})^2 = R^2$.

Entre las dos ecuaciones de condicion indicadas, que serán funciones de α, $\mathfrak{G}$ i R, puede eliminarse R, quedando una ecuacion de relacion entre α i $\mathfrak{G}$ que representará el lugar jeométrico de los centros de infinitos círculos tanjentes à la otra curva en el punto (x', y'): una recta, desde luego, «perpendicular en el punto de contacto á la tanjente comun.» Pero si se agregase la condicion de que el círculo tanjente pasase ademas por otro punto (g, h), resultaria una ecuacion mas... $(g - \alpha)^2 + (h - \mathfrak{G})^2 = R^2$, i la cuestion seria determinada.

2.°—Sean n curvas, A, B, C, &c; ... $f(x, y) = 0$, $f'(x, y) = 0$, $f''(x, y) = 0$... &c.

Quiere trazarse otra curva de determinada especie Q, que sea tanjente à las n curvas propuestas; i su ecuacion jeneral es ... $F(x, y) = 0$, de coeficientes indeterminados.

Designando por x', y' las coordenadas desconocidas del punto de contacto de A con Q, ellas satisfarán á las ecuaciones de las dos curvas; i se obtiene ... $f(x', y') = 0$; $F(x', y') = 0$.

Igualmente se obtiene .. $f'(x'', y'') = 0$, $F(x'', y'') = 0$; $f''(x''', y''') = 0$; $F(x''', y''') = 0$ &c; designando por x'', y'', x''', y''', &c, los pares de coordenadas de los puntos desconocidos de contacto de B con Q, C con Q &c.

Son $2n$ ecuaciones en que entran las $2n$ incògnitas x', y', x'', y'', &c, i los coeficientes indeterminados de $F(x, y) = 0$.

Si por el punto (x', y') se tira una tanjente á la curva A, i otra á la Q, las dos constituirán una sola recta, tanjente comun; i por tanto, igualados como àntes los coeficientes de y de las dos ecuaciones de esta tanjente, resueltas en x, hai una ecuacion mas de relacion entre x', y', i los coeficientes de Q, que puede representarse así; .. $f_{,}(x', y') = F_{,}(x', y')$.

Haciendo lo mismo en el punto (x'', y'') entre B i Q, en el (x''', y''') entre C i Q &c, resultarán ecuaciones análogas ... $f_{,,}(x'', y'') = F_{,,}(x'', y'')$; $f_{,,,}(x''', y''') = F_{,,,}(x''', y''')$ &c; hasta en número n.

Total de ecuaciones $3n$, para determinar las $2n$ coordenadas de los n puntos de contacto i los coeficientes de $F(x, y) = 0$, curva tanjente comun. La cuestion es pues determinada si hai n coeficientes que hallar; i así sucederia en el caso de buscarse un círculo tanjente á tres curvas dadas, caso que admite hasta ocho soluciones.

Si dàndose dos círculos se buscase otro círculo tanjente á ambos, la cuestion seria indeterminada porque faltaria una de las ecuaciones necesarias; pero agregando la condicion de que los tres centros estuviesen en línea recta, habria notoriamente determinacion por conocerse el valor del radio del círculo buscado, i hasta cuatro soluciones.

Concavidad i convexidad, límites i puntos de inflexion de las curvas—Pueden reconocerse, por las diversas posiciones que toma una tanjente haciendo variar el punto de contacto.

Sea $A(x - x') + B(y - y') = 0$ la ecuacion de una tanjente AB (Fig.^{s} 55 i 56) á una curva en el punto (x', y'). Con ejes rectangulares, i puesta la ecuacion así; $y - y' = -\frac{A}{B}(x - x') = F(x', y')(x' - x')$; será $F(x', y') = tanj.\, BAX$.

Sea m el punto primitivo de contacto, que va á hacerse variar en el sentido de las x positivas. Creciendo x', i siendo m' el nuevo punto de contacto, BAX mengua si la curva es cóncava ácia OX (Fig. 55) con y' positiva, ó conveja con y' negativa; i BAX crece (Fig. 56) si la curva es conveja en el primer caso, ó cóncava en el segundo. Poniendo pues en la ecuacion de la tanjente los nuevos valores correlativos de x', y', la concavidad ó convexidad de la curvatura será indicada, segun el caso, por el simple aumento ó diminucion de $F(x', y')$ sin variar de signo.

$F(x', y') = 0$; ... $àng.\, BAX = 0$. La tanjente es paralela al eje de las x, i limita á la curva en el sentido de las ordenadas (positivas ó negativas). La ordenada es la *máxima* ó la *mínima*, segun la posicion i clase de curvatura de la curva con respecto al eje de las abscisas.

$F(x', y') < 0$; ... $BAX > \frac{1}{2}\pi$. Representa el punto de contacto en m''. La curva pasó (Fig. 55) por el indicado límite creciendo x'; ó (Fig. 56) por el de la tanjente en m''', paralela al eje de las y, menguando x'.

$F(x', y') = \infty$; . . $BAX = \frac{1}{2}\pi$. Tanjente en m''', que limita la curva en el sentido de las x positivas. La abscisa es *màxima* siendo cóncava la curva ácia el eje de las y: *mínima* siendo conveja la curva ácia el mismo eje.

Si la curva pasa á la izquierda de OY, igual exámen puede hacerse del lado de las x negativas, para ordenadas positivas ó negativas: indicando siempre la continuidad de aumento ó decrecimiento de $F(x', y')$, continuidad de curvatura en igual sentido.

Fácil es persuadirse de que los razonamientos hechos i consecuencias deducidas suponiendo para mayor sencillez ejes rectangulares, son aplicables al caso de coordenadas oblicuas.

Si menguó $F(x', y')$ hasta un punto M (Fig. 57), i pasado este empezó á crecer; ó si creció hasta un punto N (Fig. 58), i pasado este empezó á menguar; la curvatura cambia de cóncava á conveja en M, ó de conveja á cóncava en N, i estos puntos son *puntos de inflexion*: la tanjente es allí tambien secante.

Es posible aplicar á determinadas curvas estos principios jenerales, i ya se ha hecho en parte; pero su completo desenvolvimiento corresponde al cálculo diferencial.

LECCION 17.

Normales — Asíntotas.

Llàmase normal á la perpendicular á la tanjente en el punto de contacto. De la ecuacion jeneral de esta se deduce inmediatamente la de aquella, para una curva dada.

Sea la curva . . $f(x, y) = 0$. La tanjente en uno de sus puntos (x', y') tiene por ecuacion; . .

$A(x - x') + B(y - y') = 0$; ó bien . . $y - y' = -\frac{A}{B}(x - x') = a(x - x')$ } Haciendo . . $a = -\frac{A}{B}$.

La ecuacion de la normal que pase por el mismo punto (x', y') es de la forma . . $y - y' = a'(x - x')$; i debe determinarse el coeficiente a' por la condicion de perpendicularidad á la tanjente.

Esta condicion es para ejes rectangulares; . . $1 + aa' = 0$; de donde . . $a' = -\frac{1}{a} = \frac{B}{A}$

Para ejes oblicuos; . . $1 + aa' - (a + a')\cos.\theta = 0$; que da . . $a = -\frac{1 - a\cos.\theta}{a - \cos.\theta} = -\frac{B - A\cos\theta}{A - B\cos\theta}$

Se ha sustituido el valor de a. Las ecuaciones de la normal para los dos casos son pues, quitando denominadores: . . $B(x - x') - A(y - y') = 0$ . . (1); . . $(B - A\cos.\theta)(x - x') - (A - B\cos.\theta)(y - y') = 0$ . . (1')

I como ya se sabe lo que representan A i B, cualquiera de las dos ecuaciones sale directamente de la ecuacion de la curva que se proponga.

Si à la misma curva . . $f(x, y) = 0$ se le quiere tirar una normal desde un punto (α, β) cualquiera; designando por x', y' las coordenadas desconocidas del punto en que ella cortará á la curva, i suponiendo ejes rectangulares, su ecuacion es la (1); . . $B(x - x') - A(y - y') = 0$. (m)

Como pasa por el punto dado (α, β), se tiene; $B(\alpha - x') - A(\beta - y') = 0$ . . (n)

I por estar el punto (x', y') en la curva, se tiene tambien; . . $f(x', y') = 0$ . . (p)

Las dos ecuaciones particulares, (n), (p), darán los valores de x', y', para sustituirlos en (m). Resultarán tantas normales como valores reales correlativos de x', y'.

Se construirán las normales por sus ecuaciones; ó determinando por sus coordenadas los puntos en que cortan á la curva; ó hallándolos como intersecciones de las líneas (n) i (p) cuyas coordenadas jenerales fuesen x', y'.

Si eliminada y' entre las ecuaciones (n) i (p), se escribe la condicion analítica de que la ecuacion resultante en x' tenga dos raices iguales, equivaldrá esto á espresar que dos normales se confunden en una, ó que de un punto se han tirado dos normales infinitamente próximas. Esa condicion escrita, que es una ecuacion de relacion entre α i β, representa todos los puntos del plano de la curva en que suce-

sivamente concurren infinitos pares de normales infinitamente próximas, i cuyo lugar jeométrico se llama la *evoluta* de la curva propuesta, que es su *evolvente*.

Claramente se percibe que las normales á la *evolvente* son tanjentes á la *evoluta*. Los puntos de contacto, ó estremos de las normales, son *centros de curvatura* de la evolvente, i las normales *radios de curvatura* de la misma, ó radios de los *círculos osculadores* que sirven para evaluarla—Pertenece esta nomenclatura á estudios de órden mas elevado.

Subnormal—La parte del eje de las abscisas comprendida entre el pie de la ordenada del punto de contacto i el pie de la normal.

Siendo aq (Fig. 54) una tanjente, i mn la correspondiente normal, la subnormal será $np = Op - On$; diferencia entre la abscisa del punto de contacto i la de la interseccion de la normal con el eje de las x. Su valor se obtendrá pues haciendo $y = 0$ en la ecuacion de la normal para tener $x = On$, i restando este valor de $x' = Op$; lo cual equivale á despejar $x - x'$ en la ecuacion de la normal despues de hecho $y = 0$, i cambiar á su valor el signo.

Ejemplo—La curva . . $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ tiene por tanjente (Leccion 14); . . . .

$$a^2 y' (y - y') + b^2 x' (x - x') = 0.$$

Ecuacion (1) de la normal en el punto (x', y'); . . $a^2 y' (x - x') - b^2 x' (y - y') = 0$.

$$y = 0. \quad x - x' = -\frac{b^2 x' y'}{a^2 y'} = -\frac{b^2 x'}{a^2} \quad \ldots x' - x = \frac{b^2 x'}{a^2} \ldots \text{Subnormal.}$$

En las aplicaciones se tendrán desde luego presentes, para no cometer error en los valores analíticos de la subnormal np i de la subtanjente pq, las posiciones relativas de los tres puntos, n, p, q, con respecto al oríjen.

SECCION 12. — Asíntotas.

Asíntota de una curva es una recta á la cual una rama infinita de la misma curva se acerca continuadamente, i puede aproximarse á menor distancia que cualquier magnitud dada, por pequeña que sea, pero sin encontrarla jamas. Trátase de establecer el método de su determinacion para una curva dada, si tiene una ó mas, teniendo por supuesto ramas infinitas.

Asíntotas no paralelas al eje de las y—Sea . . . $y = cx + d$ . . (2), la ecuacion de una asíntota AB (Fig. 59) de la curva CD. Son desconocidas c i d, i hai que determinarlas por la condicion de la cuestion.

Para un punto m de la recta, cuya abscisa es . . $x = Op$, el valor de la ordenada mp que da su ecuacion es . . . $cx + d$. La magnitud mn, que ha de agregarse para obtener la ordenada del punto n de la curva correspondiente á la misma abscisa Op, representa la distancia, en el sentido de las ordenadas, entre la asíntota i la curva, distancia tanto menor cuanto mas se aleje el punto p del oríjen: es pues mn evidentemente una funcion de x, que se designará por $\downarrow(x)$, la cual mengua creciendo x, i que converje acia *cero* cuando x converje acia *el infinito*.

Se tendrá pues para la curva; . . $y = cx + d + \downarrow(x)$ . . (3); de donde . . . $c = \frac{y}{x} - \frac{d + \downarrow(x)}{x}$

Creciendo x, se acerca $\frac{d + \downarrow(x)}{x}$ á *cero*; i la fraccion $\frac{y}{x}$ se acerca á c como á su límite.

Para $x = \infty$ se tiene por tanto . . . $c = \frac{y}{x}$: de donde . . . $y = cx$.

Determinada c, i puesto su valor en (2), sáquese en (3) el que corresponde á d, introducido el valor jeneral de y que da la ecuacion de la curva i haciendo $x = \infty$.

Resulta . . . $d = y - cx - \downarrow(x)$. Creciendo x mengua $\downarrow(x)$, i se acerca $y - cx$ á d como á su límite. Para . . . $x = \infty$ sale . . $d = y - cx$; de donde $y = cx + d$.

Hé aquí pues determinadas c i d por la condicion de acercarse continuadamente la curva á la recta i encontrarla en el infinito, es decir no encontrarla jamas.

En vez de tomar para c el valor $\frac{y}{x}$ cuando $x = \infty$, equivale á lo mismo «reemplazar y por cx en la ecuacion de la curva, i buscar luego el valor de c correspondiente á $x = \infty$». Determinada c, se obtendrá

luego d «reemplazando y por $cx+d$ (puesto por c su valor) en la ecuacion de la curva, i haciendo $x=\infty$.»
Este es el procedimiento que los principios espuestos indican, i que dejarán aclarado algunos ejemplos.

Ejemplo 1.°—Sea la curva . . $y^2-3xy+2x^2+3y-2x-5=0$ . . (4)

Asíntota no paralela al eje de las y; . . . $y=cx+d$. Van á determinarse c i d.

En (4); . . $y=cx$ } $(c^2-3c+2)x^2+(3c-2)x-5=0$; ó bien . . $c^2-3c+2+\frac{3c-2}{x}-\frac{5}{x^2}=0$ . . (5)

En (5); . . $x=\infty$ } $c^2-3c+2=0$; . . $c=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}-2\right)}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$ } $c=1$; . . $c=2$

Tiene c dos valores reales. Habrá asíntotas si son reales i finitos los valores correlativos de la otra constante d.

$c=1$; . . $y=cx+d=x+d$ } En (4); . . $(x+d)^2-3x(x+d)+2x^2+3(x+d)-2x-5=0$.

I simplificando; . . $(1-d)x+d^2+3d-5=0$; ó bien . . . $1-d+\frac{d^2+3d-5}{x}=0$ . . (6)

En (6); . . $x=\infty$ } $1-d=0$; . . $d=1$ } . . $c=1, d=1$; . . . $y=x+1$ . . . Una asíntota.

$c=2$; . . $y=cx+d=2x+d$ } En (4); . . $(2x+d)^2-3x(2x+d)+2x^2+3(2x+d)-2x-5=0$

Simplificando; . . $(d+4)x+d^2+3d-5=0$; ó bien . . . $d+4+\frac{d^2+3d-5}{x}=0$ . . (7)

En (7); . . $x=\infty$ } $d+4=0$; . . . $d=-4$ } . . $c=2, d=-4$; . . . $y=2x-4$ . . Otra asíntota.

Ejemplo 2.°—Sea la curva . . . $y^3+x^3-3xy=0$ . . (8) } Asíntota en jeneral; . . . $y=cx+d$.

En (8); . . . $y=cx$ } $c^3x^3+x^3-3cx^2=0$ . . . $(c^3+1)x-3c=0$; . . . $c^3+1-\frac{3c}{x}=0$

$x=\infty$ } $c^3+1=0$; . . $c^3+1=(c+1)(c^2-c+1)=0$ } . . $c+1=0$; . . $c=-1$; raiz real.

$$c^2-c+1=0\,;\,.\,c=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\,;\text{ raices imajinarias.}$$

Tiene c un solo valor real. Puede haber una asíntota, si á $c=-1$ corresponde d real i finita.

$c=-1$; . . $y=cx+d=-x+d$ } En (8) . . $3(d+1)x^2-3d(d+1)x+d^3=0$; . . .

$$3(d+1)-\frac{3d(d+1)}{x}+\frac{d^3}{x^2}=0\,;\,.\,.\,(9)$$

En (9); . . $x=\infty$ } $3(d+1)=0$; . . $d=-1$ } . . $c=-1, d=-1$; . . $y+x+1=0$; . . Asíntota única.

Ejemplo 3.°—Sea en fin la curva . . . $a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0$ } $y=cx$; . . $a^2c^2x^2-b^2x^2+a^2b^2=0$; . .

Procediendo como en los ejemplos anteriores sale . . $a^2c^2-b^2=0$; . . $c=\pm\frac{b}{a}$

$y=\pm\frac{b}{a}x+d$ } . . $a^2\left(\pm\frac{b}{a}x+d\right)^2-b^2x^2+a^2b^2=0$; . . $\pm2abdx+a^2(b^2+d^2)=0$; . . $2abd=0$; . . $d=0$.

$c=\pm\frac{b}{a}$, $d=0$ } . . $y=\pm\frac{b}{a}x$ Dos asíntotas simétricas, que pasan por el oríjen.

Pudiera suceder que hechas las operaciones, i obtenido para c valor real, resultase d infinita. En este caso la asíntota buscada se hallaria situada en el infinito, i la rama infinita correspondiente de la curva tenderia acia la línea recta en la direccion determinada por la constante c. Las ramas de curva infinitas que tienden acia la línea recta i que sin embargo no tienen asíntota, (pues á esto equivale tenerla en el infinito), se llaman *ramas parabólicas*, i las que tienen asíntota se llaman *ramas hiperbólicas*: denominaciones dadas con mucha propiedad, por la analojía con la *paràbola* i la *hipérbola*, como se verá despues.

Siendo imajinarios los valores que dé el cálculo para c ó para d, no hai asíntotas.

Asìntotas no paralelas al eje de las x—El procedimiento es conforme con el ya esplicado, pero partiendo de $x=cy+d$ como ecuacion jeneral de la asíntota.

Las asìntotas paralelas á uno de los ejes coordenadas, ó á ambos, ó confundidas con ellos, suelen encontrarse inmediatamente, resuelta la ecuacion de la curva para una ó para ambas variables, como se vió en la Leccion 5,ª Fig. 26. Los procedimientos mismos anteriores dan las paralelas, cuando resultando nulo el valor de la constante c, se obtiene para la otra constante d valor real i finito: i si ambas

resultasen con valores nulos, serian asíntotas los ejes coordenados respectivos. Por este medio, ò simplemente resolviendo las ecuaciones, se reconoce que los ejes coordenados son asíntotas de las curvas $xy - m^2 = 0$, $xy^2 + 2 = 0$; i que las asíntotas de la curva . . . $xy + 2y - 4 = 0$ son $y = 0$ (el eje de las abscisas), i $x = -2$ (una paralela al eje de las ordenadas.)

Si la funcion de x que representa el valor jeneral de la ordenada de una curva puede ponerse bajo la forma . . . $y = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \ldots$ &c, es claro que la recta . . . $y = ax + b$ es asíntota, porque á medida que crece x tiende y acia el valor $ax + b$. De la misma manera, si la ecuacion de la curva diese . . $x = ay + b + \frac{c}{y} + \frac{d}{y^2} + \ldots$ &c, seria asíntota la recta $x = ay + b$.

LECCION 18.

Teoría de las asíntotas.—*(Conclusion.)*

Una asíntota puede ser considerada como tanjente cuyo punto de contacto está situado en el infinito. Así es que, si para una curva . . $f(x, y) = 0$, i partiendo de la ecuacion jeneral . . $A(x - x') + B(y - y') = 0$ de su tanjente, se trata de determinar esta por la condicion indicada, de hallarse á distancia infinita el punto de contacto, en el supuesto de no ser la tanjente paralela al eje de las y, el procedimiento dará las mismas reglas ántes deducidas, para sacar los valores de las dos constantes c i d.

Pudiera tambien determinarse la asíntota considerándola como una secante á la curva, que tuviese dos puntos de interseccion situados á distancia infinita. Es innecesario entrar sobre esta máteria en mas pormenores.

Ocurre á veces el caso de que el valor jeneral de la ordenada de una curva se presente bajo la forma... $y = F(x) + f(x)$, i que el carácter de $f(x)$ sea acercarse á *cero* cuando x crece ácia el infinito. Creciendo entonces x, tiende y al valor $F(x)$; la curva propuesta ... $y = F(x) + f(x)$ se acerca constantemente á la curva . . $y = F(x)$, i las dos curvas son asintóticas recíprocamente, ó mas bien la segunda lo es con respecto á la primera: circunstancia bien notable. Así sucede con la curva . . $xy - x^3 - 2 = 0$, cuya ecuacion resuelta en y da . . . $y = x^2 + \frac{2}{x}$. La fraccion $\frac{2}{x}$ mengua creciendo x, i converje ácia *cero* cuando x converje ácia el infinito: es pues. . . $y = x^2$ (una *parábola*), curva asintótica de la propuesta.

Tràtase ahora de hallar las asíntotas de una curva referida á coordenadas polares, procediendo directamente, esto es, sin pasar á coordenadas rectilíneas.

Sea . . . $r = f(\varphi)$ la curva MN (Fig. 60), siendo O el polo i OX el eje polar.

Si $r = Om$, On, Or &c, crece cuando $\varphi = mOX$, nOX, rOX &c. se acerca à cierto valor determinado $AOX = \alpha$, i es $r = \infty$ cuando $\varphi = \alpha$, entónces es notorio que el radio vector OA correspondiente á la direccion $\varphi = \alpha$ es una asíntota, ó paralelo á una asíntota de la curva, que por supuesto tiene rama infinita.

Para descubrir cual de los dos casos indicados se verifica, de un punto cualquiera m de la curva bájese la perpendicular mc sobre el radio vector OA de la direccion $\varphi = \alpha$. Se tendrá; . . . . $mc = Om \times sen\, mOc = r\, sen\,(\varphi - \alpha) = f(\varphi)\, sen\,(\varphi - \alpha)$ } Por ser . . $r = f(\varphi)$

Si este valor jeneral $f(\varphi)\, sen\,(\varphi - \alpha)$ de mc, nc, rc &c, medidas sucesivas de la distancia de la curva à la recta OA, se reduce á *cero* cuando $\varphi = \alpha$, entónces el radio vector OA es asíntota evidentemente; pero si converje ácia cierta magnitud finita ϵ, como á su límite, cuando φ converje ácia el valor α, la asíntota no es OA, sino una paralela à esta recta, tirada á la distancia ϵ. Estos sencillos principios van á ser aplicados á algunos ejemplos.

Ejemplo 1.° —Sea la curva cuya ecuacion polar es ... $r = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 sen^2 \varphi - b^2 cos^2 \varphi)}}$

Resulta ser $r=\infty$ cuando ... $a^2\,sen^2\,\varphi - b^2\,cos^2\,\varphi = 0$; de donde ... $tanj.(\varphi=\alpha)=\pm\frac{b}{a}$

Tomando el signo superior, la magnitud de la perpendicular P bajada desde cualquier punto de la curva sobre el radio vector que forma con el eje polar el ángulo límite α cuya tanjente es $\frac{b}{a}$, tendrá por espresion jeneral .. $P=f(\varphi)\,sen\,(\varphi-\alpha)$; es decir;

$$P=\frac{ab}{\sqrt{(a^2\,sen^2\,\varphi-b^2\,cos^2\,\varphi)}}\times sen\,(\varphi-\alpha)=\frac{ab(sen\,\varphi\,cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\varphi)}{\sqrt{(a^2\,sen^2\,\varphi-b^2\,cos^2\,\varphi)}}$$

Se ha puesto por $sen\,(\varphi-\alpha)$ su desarrollo. Van á introducirse ahora los valores de $sen\,\alpha$ i $cos.\,\alpha$ en funcion de la tanjente.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha=\dfrac{tanj.\,\alpha}{\sqrt{(1+tanj^2\,\alpha)}}=\dfrac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \\ cos\,\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{(1+tanj^2\,\alpha)}}=\dfrac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \end{array}\right\} P=\frac{ab(a\,sen\,\varphi-b\,cos\,\varphi)}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2\,sen^2\,\varphi-b^2\,cos^2\,\varphi)}}\text{; ó bien ...}$$

$$P=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\times\sqrt{\left(\frac{(a\,sen\,\varphi-b\,cos\,\varphi)^2}{(a\,sen\,\varphi-b\,cos\,\varphi)\,(a\,sen\,\varphi+b\,cos\,\varphi)}\right)}$$

O bien, simplificando; ... $P=\frac{ab\sqrt{(a\,sen\,\varphi-b\,cos\,\varphi)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a\,sen\,\varphi+b\,cos\,\varphi)}}$

En el valor de P; ... $\varphi=\alpha\;\}\;a\,sen\,\alpha-b\,cos\,\alpha=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}-\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}=0$; ... $P=0$

Es nulo el valor de P cuando $\varphi=\alpha$, pues se reduce á *cero* el numerador sin suceder lo mismo en el denominador: de consiguiente es asíntota de la curva el radio vector que corresponde á la direccion dada por $tanj.(\varphi=\alpha)=\frac{b}{a}$

Por el mismo procedimiento se hallará ser tambien asíntota otro radio vector correspondiente á la direccion dada por $tanj.(\varphi=\alpha)=-\frac{b}{a}$, que representa un ángulo suplementario del anterior. Las dos asíntotas son simétricas con respecto al eje polar.

Ejemplo 2.° —Sea la curva cuya ecuacion polar es ... $r=\frac{p}{1-e\,cos.\,\varphi}$

Resulta ser $r=\infty$ cuando $1-e\,cos.\,\varphi=0$; de donde sale ... $cos.\,\varphi=\frac{1}{e}$

Como el máximo coseno es *la unidad* (el radio), es necesario que sea $\frac{1}{e}$ una fraccion propia, i por tanto $e>1$, para que haya ángulo φ siendo infinito el radio vector. La curva no tiene pues asíntotas, sino verificándose la condicion ... $e>1$.

Suponiendo que en efecto es $e>1$, sea α el ángulo límite para el cual $cos.\,(\varphi=\alpha)=\frac{1}{e}$

Conforme á lo dicho, el valor jeneral de la perpendicular P, bajada desde cualquier punto de la curva sobre el radio vector cuya inclinacion es $\varphi=\alpha$, será;

$$P=\frac{p}{1-e\,cos\,\varphi}\times sen\,(\varphi-\alpha)=\frac{p\,(sen\,\varphi\,cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\varphi)}{1-e\,cos\,\varphi}$$

$$cos.\,\alpha=\frac{1}{e};\; sen.\,\alpha=\sqrt{(1-cos^2\,\alpha)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}=\frac{\sqrt{(e^2-1)}}{e}\;\Big\}\;P=\frac{p(sen\,\varphi-cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}{e\,(1-e\,cos\,\varphi)}\ldots(N)$$

En (N); .. $\varphi=\alpha\;\}\;sen\,\alpha-cos\,\alpha\sqrt{(e^2-1)}=\frac{\sqrt{(e^2-1)}}{e}-\frac{\sqrt{(e^2-1)}}{e}=0$; $1-e\,cos\,\alpha=1-\frac{e}{e}=1-1=0$; $P=\frac{0}{0}$

Segun este resultado, cuando $\varphi=\alpha$ seria $P=\frac{0}{0}$, una magnitud indeterminada; pero tal cosa no es admisible. Hai que examinar, segun los principios del áljebra, si existe algun factor comun al nume-

rador i denominador de la fraccion (N), el cual, reduciéndose á *cero* en el mismo caso, anula ambos términos de dicha fraccion.

Multiplicando pues uno i otro término por $sen.\ \varphi + cos.\ \varphi\sqrt{(e^2-1)}$, se obtiene;

$$P=\frac{p\,(sen^2\varphi-cos^2\varphi\,(e^2-1))}{e\,(1-e\,cos\,\varphi)\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}=\frac{p\,(sen^2\varphi+cos^2\varphi-e^2\,cos^2\varphi)}{e\,(1-e\,cos\,\varphi)\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})};$$

$$\text{O bien}\ldots P=\frac{p\,(1-e^2\,cos^2\varphi)}{e\,(1-e\,cos\,\varphi)\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}$$

$$\text{O finalmente};\ldots P=\frac{p\,(1-e\,cos\,\varphi)\,(1+e\,cos\,\varphi)}{e\,(1-e\,cos\,\varphi)\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}=\frac{p\,(1+e\,cos\,\varphi)}{e\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}\ldots(N')$$

Se encontró efectivamente, i se ha suprimido, el factor comun... $1-e\,cos\,\varphi$.

En (N');.. $=\alpha\,\}\,1+e\,cos\,\alpha=1+\frac{e}{e}=2;\ sen\,\alpha+cos\,\alpha\sqrt{(e^2-1)}=\frac{\sqrt{(e^2-1)}}{e}+\frac{\sqrt{(e^2-1)}}{e}=\frac{2\sqrt{(e^2-1)}}{e}$

Por tanto;... $P=\frac{2p}{\frac{2e\sqrt{(e^2-1)}}{e}}=\frac{p}{\sqrt{(e^2-1)}}$, para el caso de $\varphi=\alpha$. Este es el límite, llamado arriba $\mathfrak{E}$, de los decrecimientos de la perpendicular. En consecuencia es asíntota de la curva una recta paralela al radio vector cuya inclinacion $\varphi=\alpha$ tiene por coseno el valor $\frac{1}{e}$; tirada dicha paralela á la distancia ... $\frac{p}{\sqrt{(e^2-1)}}$ cuya magnitud acaba de encontrarse.

La ecuacion de esta asíntota es, aplicando la fórmula (A), Leccion 9.ª;

$$r=\frac{\frac{p}{\sqrt{(e^2-1)}}}{sen\,(\varphi-\alpha)}=\frac{p}{\sqrt{(e^2-1)}\,(sen\,\varphi\,cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\varphi)}=\frac{ep}{\sqrt{(e^2-1)}\,(sen\,\varphi-cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})};$$ habiendo puesto los valores de *sen.* α i *cos.* α.

Esta asíntota no es única. Como $cos.\ \varphi=\frac{1}{e}$ corresponde á dos ángulos iguales, uno positivo i otro negativo, hai otra asíntota paralela al radio vector que forma con el eje polar un ángulo negativo, ó por debajo, para el cual es $cos\,(\varphi=-\alpha)=\frac{1}{e}$, i tirada á la misma distancia... $\frac{p}{\sqrt{(e^2-1)}}$ en sentido contrario. Para establecer su ecuacion se cambiará el signo á este valor, i se tendrá presente que dos ángulos iguales i de signo contrario tienen senos tambien iguales i de signo contrario: resulta;

$$r=\frac{\frac{-p}{\sqrt{(e^2-1)}}}{sen\,(\varphi-\alpha)}=\frac{-p}{\sqrt{(e^2-1)}\left(sen\,\varphi\times\frac{1}{e}-cos\,\varphi\times\frac{-\sqrt{(e^2-1)}}{e}\right)}=\frac{-ep}{\sqrt{(e^2-1)}\,(sen\,\varphi+cos\,\varphi\sqrt{(e^2-1)})}$$

Haciendo para ambas ecuaciones $\varphi=\pi\,(2\ rectos)$, de donde *sen.* $\varphi=0$, *cos.* $\varphi=-1$, dan una i otra; ... $r=\frac{ep}{e^2-1}$. A esta distancia del polo cortan las dos asíntotas al eje polar, respecto del cual son simétricas.

Ejemplo 3.º – Para la curva $r=\frac{a}{\varphi}$, se encuentra que tiene una asíntota paralela al eje polar, á una distancia $=a$, como aparece de las siguientes operaciones.

$r=\infty;..\varphi=0\,\}\,\varphi=\alpha;\ldots sen\,\alpha=0;\ cos\,\alpha=1$

$$P=\frac{a}{\varphi}\,(sen\,(\varphi-\alpha))=\frac{a\,(sen\,\varphi\,cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\varphi)}{\varphi}=\frac{a\,sen\,\varphi}{\varphi}$$

$\varphi=\alpha=0\,\}\ P=\frac{a\,sen\,\alpha}{\alpha}=\frac{a\times 0}{0}=a\,\}$ Ecuacion de la asíntota; ... $r=\frac{a}{sen\,(\varphi-a)}=\frac{a}{sen\,\varphi}$

LECCION 19.

Líneas del 2.º órden.

SECCION 13—Líneas del 2.º órden.

Discusion de la ecuacion jeneral del 2.º grado entre dos variables.

Resuelta en y la ecuacion jeneral . . . $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ . . (1), se obtiene;

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{((B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF)}=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(mx^2+2nx+p)}\ldots(2)$$

Se ha hecho para abreviar; . . . $B^2-4AC=m$; $BD-2AE=n$; $D^2-4AF=p$.

Para cada valor de x hai en jeneral dos valores de y, desiguales, que en la fórmula tienen comun la parte . . . $-\frac{Bx+D}{2A}$.

Representa . . $y=-\frac{Bx+D}{2A}$ una línea recta, vgr. AB, (Fig. 61). Suponiéndola construida, se obtendrán dos ordenadas de la curva para determinada abscisa Op tirando la ordenada mp de la recta, i agregando á ella i quitando una misma magnitud $mn=mn'$, valor correspondiente del radical: de esta manera podrán situarse diferentes puntos n, n', r, r', &c. de la misma curva, mientras el radical dé valores reales por los que se asignen á x: i si el radical se anula para una abscisa Op', el punto m' que se obtiene es de interseccion de la curva con la recta AB.

Esta recta AB es diámetro, pues que divide por mitad á todas las cuerdas nn', rr', tt' &c, paralelas al eje de las y. I como antes de resolver la ecuacion (1) ha podido variarse la direccion de los ejes, dando cualquiera á OY, resulta que en las curvas de 2.º órden cualquier sistema de cuerdas paralelas es dividido por mitad por una recta; ó, lo que es lo mismo, «que estas curvas tienen infinitos diámetros.»

La forma de la curva depende notoriamente de la espresion radical . . . $\frac{1}{2A}\sqrt{(mx^2+2nx+p)}$, valor de las semi-cuerdas correspondientes á determinadas abscisas, que puede crecer ó decrecer continuadamente creciendo x, ó crecer hasta cierto máximo i decrecer luego. El exámen del radical dará por tanto á conocer las diversas clases de curvas representadas por la ecuacion jeneral.

Se sabe, i ademas se reconoce sin trabajo, que en el trinomio . . . $mx^2+2nx+p$ puede siempre asignarse á x un valor tal, positivo ó negativo, que con él i con todos los superiores á él sea $mx^2>2nx+p$. Desde ese valor para arriba, el signo definitivo del trinomio será el mismo del coeficiente m, puesto que x^2 es cantidad esencialmente positiva.

Si $m=B^2-4AC<0$, habrá ciertos valores de x, positivos ó negativos, mas allá de los cuales será $mx^2+2nx+p$ una cantidad negativa, dando para y valores imajinarios. La curva tiene entonces límites en el sentido de las abscisas; i tambien los tiene en el sentido de las ordenadas, porque siendo limitados los valores de x que hacen real el radical, deben serlo igualmente los correlativos de y.

Si $m=B^2-4AC>0$, el radical podrá ser imajinario para algunos valores finitos de x que hagan $mx^2<2nx+p$; pero mas allá de ciertos valores de x, positivos ó negativos, el radical es real, i su valor crece indefinidamente creciendo x. En tal caso la curva se abre i se estiende mas i mas, sin límite alguno en ningun sentido, porque á valores ilimitados de x corresponden valores ilimitados de y.

Ultimamente: si $m=B^2-4AC=0$, el trinomio se reduce á $2nx+p$. Siendo n i x positivos, puede asignarse á x un valor mas allá del cual sea siempre $2nx>p$, i real el radical, é indefinidamente mayores las cuerdas creciendo x; pero si x es negativa, hai para ella cierto valor mas allá del cual es siempre $2nx+p<0$, é imajinaria y. La curva será entonces ilimitada en el sentido de las x positivas, solamente. Siendo negativa n, igual razonamiento probaria ser la curva en ese caso ilimitada solamente en el sentido de las x negativas.

La ecuacion jeneral del 2.º grado entre dos variables representa pues tres clases de curvas; á saber:

Limitadas en todos sentidos, ó cerradas — Elipses — *Carácter*, $B^2-4AC<0$.

Ilimitadas en todos sentidos — Hipérbolas — *Carácter*, $B^2-4AC>0$.

Limitadas en un sentido é ilimitadas en otro — PARÁBOLAS — *Carácter*, $B^2 - 4AC = 0$.

Dada la ecuacion con coeficientes numéricos, se sabrá inmediatamente á qué clase de curva pertenece, formando el binomio $B^2 - 4AC$.

Sea . . $2y^2 - 3xy - x^2 - 3y + 2x - 5 = 0 \rangle (-3)^2 - 4 \times 2 \times -1 = 9 + 8 > 0$ . . . Hipérbola.

Resolviendo en x la ecuacion (1), los resultados jenerales son los mismos; porque da;

$$x = -\frac{By+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{((B^2-4AC)y^2 + 2(BE-2CD)y + E^2 - 4CF)} \ldots (3)$$

Los dos diámetros, $y = -\frac{Bx+D}{2A}$, $x = -\frac{By+E}{2C}$, se cortan en el punto cuyas coordenadas son las mismas (4) i (5) de la Leccion 12: coordenadas del *centro*.

Como toda esta teorìa se ha deducido del anàlisis del radical, para el caso especial de . . . . $Bxy + Dy + Ex + F = 0$, de que sale . . $y = -\frac{Ex+F}{Bx+D}$, pudiera dudarse de la naturaleza de la curva que la ecuacion representa, siendo todavía del 2.° grado.

Todo se aclara mudando la direccion de los ejes, de la manera mas jeneral, esto es, pasando de ejes oblicuos á oblicuos. Hai que hacer $x = ay' + bx'$, $y = cy' + dx'$; representados por a, b, c, d, los coeficientes de y', x' en las fórmulas de trasformacion respectivas. ((A) i (B), Leccion 11.)

Será; . . $B(ay' + bx')(cy' + dx') + D(cy' + dx') + E(ay' + bx') + F = 0$; i vuelve á aparecer, representando la misma curva, la ecuacion completa del 2.° grado $Bacy'^2 + B(ad + bc)x'y' + Bbdx'^2 + .. = 0$

$B^2 - 4AC \rangle B^2(ad + bc)^2 - 4Bac \times Bbd = B^2(ad - bc)^2$; que es el producto de dos cuadrados, esencialmente positivo.

La ecuacion propuesta representa por tanto *hipérbola*, pues que $B^2 - 4AC > 0$.

Son interesantes las siguientes observaciones, sobre otros casos particulares de la ecuacion jeneral (1).

1.° — Si falta uno de los cuadrados (y^2, x^2), A ó C serán nulos, i $B^2 - 4AC$ se reduce á $B^2 > 0$, que representa *hipérbola*.

2.° — Si los coeficientes A, C, tienen signos contrarios, $B^2 - 4AC > 0$ por convertirse en suma, i la curva es tambien *hipérbola*.

3.° — Faltando el rectángulo xy, i uno de los cuadrados, $B^2 - 4AC = 0$, pues que son nulos sus dos términos: la curva es *paràbola*.

4.° — Cuando falta el término en xy, i A, C, tienen signos iguales, $B^2 = 0$, $4AC$ es positivo, i $B^2 - 4AC < 0$: *elipse*. Si A, C, tienen signos desiguales, *hipérbola*.

5.° — El círculo es caso particular de la elipse. La ecuacion jeneral representará círculo (Leccion 10), siendo $A = C$, i $B = 0$, ó $B = 2A\cos\theta$, segun fuere rectangular ú oblicuo el sistema coordenado; i se tendrá $B^2 - 4AC = -4A^2$, ó $B^2 - 4AC = 4A^2\cos^2\theta - 4A^2 = -4A^2(1 - \cos^2\theta) = -4A^2\,sen^2\theta$. Ambos resultados son negativos, é indican *elipse*.

Basta el exámen de los términos de 2.° grado para determinar, como se ha visto, la clase de curva que representa (1). Ellos forman en jeneral un trinomio homojéneo $Ay^2 + Bxy + Cx^2$, descomponible en dos factores de primer grado; que serán imajinarios, reales i desiguales, ó reales é iguales, segun fuere $B^2 - 4AC$ negativo, positivo ó nulo.

Sin entrar por ahora en el análisis minucioso de las propiedades de las curvas de 2.° grado, se las considerará en jeneral por clases, partiendo de la ecuacion resuelta . . $y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(mx^2 + 2nx + p)}$ . . (2)

ELIPSE — *Carácter*, $B^2 - 4AC < 0$; m negativa. Es $mx^2 + 2nx + p = 0$ el valor del trinomio del radical para las intersecciones de la curva con el diámetro . . . $y = -\frac{Bx+D}{2A}$.

$x = -\frac{n}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{(n^2 - mp)}$ (4). Esta espresion representa las dos raices del trinomio, que pueden ser; 1.° reales i desiguales; 2.° reales é iguales; i 3.° imajinarias. I designándolas por α, ϵ, se tendrá; . .

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(m(x-\alpha)(x-\epsilon))} \ldots (2')$$

Caso 1°; raices reales i desiguales; i sea $\epsilon > \alpha$. Construido el diámetro ... $y = -\frac{Bx+D}{2A}$, (*AB*, Fig. 62) tómense las dos abscisas $Oa = \alpha$, $Ob = \epsilon$, i tírense las aa', bb', paralelas al eje de las y. Dando á x valores como $Oc, > \alpha$ i $< \epsilon$, será positivo $m(x-\alpha)(x-\epsilon)$, por ser negativos dos factores, m i $(x-\epsilon)$, i positivo $(x-\alpha)$; el radical será real, i habrá dos ordenadas, cc', cc'', i una cuerda $c'c''$. Cuando $x < \alpha$ ó $> \epsilon$, es imajinaria y. Cuando $x = \alpha$, ó $x = \epsilon$, el radical se anula i la ordenada es única, aa', ó bb'; resultando que estas dos rectas tienen un solo punto comun con la curva, es decir, le son tanjentes, i la encierran ó limitan en el sentido de las abscisas. En este caso es en (4) $n^2 - mp > 0$; ó bien .. $(BD-2AE)^2 - (B^2-4AC)(D^2-4AF)$ cantidad positiva.

La curva es toda conveja, porque una recta no puede cortarla en mas de dos puntos.

A la máxima cuerda paralela á OY corresponde el màximo valor del radical que es su mitad, i que puede ponerse asi; ... $\frac{1}{2A}\sqrt{(-K^2(x-\alpha)(x-\epsilon))} = \frac{K}{2A}\sqrt{((x-\alpha)(\epsilon-x))}$. I mediante que ... $(x-\alpha)+(\epsilon-x) = \epsilon-\alpha = ab$, cantidad constante, el máximo producto de estos dos factores es cuando $x-\alpha = \epsilon-x = \frac{1}{2}ab$; de donde .. $x = \frac{1}{2}(\epsilon+\alpha)$, abscisa del punto medio s entre a' i b', ((2) *Leccion* 4.ª). La cuerda $e'e''$ es pues la *màxima* buscada, en sentido paralelo á OY, i equidista de aa' i bb'. Las rectas DE, FG, paralelas á AB, que pasan por e', e'', son allí tanjentes, i limitan la curva en el sentido de las ordenadas. Está encerrada la elipse en el paralelógramo $DEFG$.

El valor de una cuerda $d'd''$, distante una magnitud $\delta = ed$ de la máxima $e'e''$, se obtiene haciendo $x = \frac{1}{2}(\epsilon+\alpha)+\delta = Od$ en ... $\frac{K}{A}\sqrt{((x-\alpha)(\epsilon-x))}$; i sale ... $\frac{K}{A}\sqrt{\left(\left(\frac{\epsilon-\alpha}{2}\right)^2-\delta^2\right)}$. Como esta espresion no altera poniendo $-\delta = ec$ por $+\delta = ed$, resulta que dos cuerdas cualesquiera, $d'd''$, $c'c''$, equidistantes de la $e'e''$, son iguales: i pues que $a'b'$ las divide por mitad, son $c'd'$, $c''d''$ iguales i paralelas al diámetro $a'b'$, i son divididas por mitad por $e'e''$, que de consiguiente es diámetro conjugado de $a'b'$. Por esto se llama *paralelógramo conjugado* al $DEFG$. La elipse admite infinitos sistemas de diámetros conjugados, supuesto que puede darse cualquiera direccion á los ejes coordenados.

Caso 2°; raices reales é iguales; es decir, $\alpha = \epsilon$.

Haciendo $\alpha = \epsilon$ en (2'), resulta; .. $y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(m(x-\alpha)^2)} = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{(x-\alpha)}{2A}\sqrt{m}$

I por ser negativa m, todos los valores de y son imajinarios, esceptuado para la suposicion $x = \alpha$, que anula lo que sigue al doble signo. La elipse se ha reducido pues á *un punto*, situado en el diámetro .. $y = -\frac{Bx+D}{2A}$, cuyas coordenadas son $x = \alpha$, $y = -\frac{B\alpha+D}{2A}$. La condicion analítica para verificarse esto, deducida de (4), es .. $n^2 - mp = 0$; ó bien ... $(BD-2AE)^2 - (B^2-4AC)(D^2-4AF) = 0$.

Se comprobará la verdad de este resultado observando en la figura 62 que á medida que $\alpha = Oa$ i $\epsilon = Ob$ se acercan á la igualdad, el punto b se acerca al punto a, i la recta bb' á la aa', estrechándose mas i mas la elipse hasta reducirse al punto a' cuando coinciden b con a i bb' con aa'.

Caso 3°; raices imajinarias. Entonces, segun los principios del áljebra, no varia de signo el producto .. $m(x-\alpha)(x-\epsilon)$, cualquiera que sea el valor real dado á x: i como entre los valores asignables á x hai muchos que hacen notoriamente negativo el trinomio por dar $mx^2 > 2nx+p$ i ser m negativa, se reconoce que siempre será él negativo, i siempre imajinaria y. Para este caso es por tanto *imajinaria* la elipse; siendo la condicion .. $(BD-2AE)^2 - (B^2-4AC)(D^2-4AF)$ cantidad negativa.

Claro está que siendo imajinarias α i ϵ no existen los puntos a i b, ni las rectas aa', bb' que hubieran de limitar la elipse, ni hai por consiguiente curva.

Segun lo dicho, por las relaciones entre los coeficientes de la ecuacion particular que se proponga se descubrirà inmediatamente si ella representa elipse, i cual de las tres *variedades* de esta curva representa. Mas fácil es sin embargo para esto último resolver en y la ecuacion, i hallar luego las raices de la espresion funcion de x contenida bajo el signo radical, igualándola á *cero*.

LECCION 20.

Líneas del 2.° órden. — *(Continuacion.)*

HIPÉRBOLA — *Carácter*, $B^2 - 4AC > 0$; m positiva.

Para esta curva, como para la elipse, habrán de considerarse separadamente los casos en que las raices α, $\mathfrak{C}$ del trinomio $mx^2 + 2nx + p$ son reales i desiguales, ó reales é iguales, ó imajinarias. Será como ántes ... $mx^2 + 2nx + p = m(x - \alpha)(x - \mathfrak{C})$.

Caso 1.°; raices reales i desiguales; i sea $\mathfrak{C} > \alpha$. Construido (Fig. 63) el diámetro AB representado por $y = -\frac{Bx + D}{2A}$, i suponiendo $Oa = \alpha$, $Ob = \mathfrak{C}$, se observa que todo valor de $x > \alpha$ i $< \mathfrak{C}$ hace negativo el producto $m(x - \alpha)(x - \mathfrak{C})$, por ser negativo $x - \mathfrak{C}$ i positivos los otros dos factores; que $x = \alpha$, ò $x = \mathfrak{C}$, anulan el radical dando para y un solo valor $aa' = -\frac{B\alpha + D}{2A}$, ó $bb' = -\frac{B\mathfrak{C} + D}{2A}$, de las intersecciones de la curva con el diámetro; i que para cualquier valor $x < \alpha$, como Oc, ó $x > \mathfrak{C}$ como Od, el radical es real, hai dos valores para y que son cc' i cc'', ó dd' i dd'', i se obtienen cuerdas $c'c''$, $d'd''$ que crecen alejándose de a' i b'. Resulta pues que entre las dos ordenadas aa', bb', indefinidamente prolongadas, no hai curva; que estas dos rectas le son tanjentes; i que las dos ramas independientes $c'a'c''$, $d'b'd''$, son abiertas é infinitas en sentidos opuestos. Condicion analítica, ... $n^2 - mp > 0$.

La cuerda para un valor de x es ... $\frac{1}{A}\sqrt{(m(x - \alpha)(x - \mathfrak{C}))}$; i la abscisa Oe del punto s, intermedio entre a' i b', es $\frac{1}{2}(\alpha + \mathfrak{C})$. Para hallar la magnitud $d'd''$ de una cuerda paralela á OY, distante de ee'' una magnitud $ed = \delta$ en el sentido de las abscisas, se pondrá por x el valor ... $\frac{1}{2}(\alpha + \mathfrak{C}) + \delta$, que convierte el radical en ... $\frac{\sqrt{m}}{A}\sqrt{\left(\delta^2 - \left(\frac{\mathfrak{C} - \alpha}{2}\right)^2\right)}$; i como esta espresion no altera cambiando $\delta = ed$ en $-\delta = ec$, se deduce que dos cuerdas cualesquiera $c'c''$, $d'd''$, paralelas i equidistantes del centro s, son iguales. Las rectas $c'd'$, $c''d''$, son tambien iguales i paralelas, i están divididas por mitad por ee'' que viene á ser diámetro conjugado de AB; i que se llama *no trasverso* por no encontrar á la curva, para diferenciarlo del trasverso AB, ó $a'b'$. La hipérbola tiene infinitos pares ó sistemas de diámetros conjugados, supuesto que á los ejes coordenados puede darse cualquiera direccion.

Caso 2.°; raices reales é iguales, esto es, $\alpha = \mathfrak{C}$. Entònces ... $y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{(x - \alpha)}{2A}\sqrt{m}$; ecuacion de primer grado entre x é y, que por ser real el radical representa dos rectas, cuya interseccion es el punto $x = \alpha$, $y = -\frac{B\alpha - D}{2A}$ del diámetro AB. La hipérbola se reduce á *dos rectas que se cortan* en este caso, en que ... $n^2 - mp = 0$.

Al acercarse pues á la igualdad $\alpha = Oa$, $\mathfrak{C} = Ob$, i una à otra las dos ordenadas aa', bb', i las dos ramas de la curva, pierden estas su curvatura gradualmente; i cuando a' i b' coinciden forman una sola recta $c'a'$ i $b'd''$, i otra $c'a'$ i $b'd'$.

Caso 3.°; imajinarias α i $\mathfrak{C}$. El producto de $(x - \alpha)(x - \mathfrak{C})$, suma entonces de dos cuadrados, por m, no varia de signo cualquiera que sea el valor real asignado á x; i será siempre positivo, por serlo m. Tiene siempre y valores reales, correlativos con los que se den á x: i como ninguno de estos anula el radical, la curva no corta al diámetro AB. La posicion de sus dos ramas ha cambiado, de la manera representada en la figura 64. Condicion, ... $n^2 - mp < 0$.

En el valor jeneral de y, la parte radical representa las semicuerdas, ó distancias de los puntos de la curva al diámetro AB para los diversos valores de x, en la direccion de las ordenadas. Si se hallase el mínimo valor de esa parte radical, i los puntos correspondientes de mínima distancia de la curva en el mismo sentido fuesen m, m', las paralelas à AB tiradas por esos puntos serian tanjentes límites de la curva.

Dos rectas que se cortan son por tanto una variedad de la hipérbola, segun el resultado del caso 2°: i puede reconocérsela por la relacion entre los coeficientes de la ecuacion indicada en él.

PARÁBOLA — *Caràcter*, $B^2-4AC=0$; $m=0$. Es entónces $Ay^2+Bxy+Cx^2$ un cuadrado perfecto.

La ecuacion jeneral resuelta en y da; ... $y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(2nx+p)}$

Sea n positiva. El mínimo valor de x para que y sea real, cualquiera que fuere el signo de p, sale de ... $2nx+p=0$, que exije sean de contrarios signos x i p: ese mínimo valor es pues, ... $x=-\frac{p}{2n}$, á que corresponde ... $y=-\frac{Bx+D}{2A}=\frac{Bp-2Dn}{4An}$, i son las coordenadas del punto de interseccion de la curva con el diámetro $y=-\frac{Bx+D}{2A}$. Todo valor absoluto de x superior á ... $-\frac{p}{2n}$, da para y dos valores reales, i una cuerda paralela al eje de las y, que crece creciendo x; i todo valor inferior de x da para y valores imajinarios. Construido el diámetro, que sea AB (Fig. 65), i suponiendo p negativa, si se toma $Op=-\frac{p}{2n}$, la ordenada pm será tanjente á la parábola, situada en la posicion dme, la cual se estenderá indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas, apartándose mas i mas del diámetro AB. Siendo p positiva, la x mínima negativa seria $Op'=Op$, la ordenada límite $p'm'$, i la posicion de la curva $d'm'e'$.

Si n fuese negativa, seria dme la posicion de la curva para p positiva, i $d'm'e'$ para p negativa.

La condicion $B^2-4AC=0$ ha podido verificarse teniendo valores A, B i C. Si ella resulta de ser $B=0$, $C=0$, todo lo dicho subsiste, i el diámetro es paralelo al eje de las abscisas. Si resulta de ser $B=0$, $A=0$, la ecuacion no contendrá á y^2 ni á xy, i resuelta en x dará; ...

$x=-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(-4CDy+E^2-4CF)}$; ó bien ... $x=-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(ry+q)}$. El diámetro... $x=-\frac{E}{2C}$ es paralelo al eje de las ordenadas, i el límite de la curva es una paralela al eje de las abscisas: suponiendo positivos los dos coeficientes, tendrá la paràbola una de las dos posiciones dme, $d'm'e'$ (Fig. 66).

Si á un tiempo son $m=B^2-4AC=0$, $n=BD-2AE=0$, se tiene por valor jeneral de la ordenada ... $y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{p}$; que representa dos rectas paralelas siendo p positiva, una sola recta siendo $p=0$, i nada siendo p negativa que hace y imajinaria. Quitando en la ecuacion los denominadores, trasponiendo i cuadrando, se obtiene ... $(2Ay+Bx+D)^2-p=0$; ó bien ... $(2Ay+Bx+D+\sqrt{p})\ (2Ay+Bx+D-\sqrt{p})=0$; lo cual hace ver «que en el caso de dos rectas paralelas, la ecuacion propuesta es descomponible en dos factores reales de primer grado en x é y;» que igualados á *cero* dan las ecuaciones de las rectas. Estas se reducen á una sola cuando $p=0$.

De aquí aparece ser variedades de la parábola *dos rectas paralelas*, ó *una sola recta*, completándose lo obtenido en la Leccion 12.

Entendidos los pormenores del análisis jeneral hecho en esta i en la precedente Leccion con respecto á las tres curvas del 2.° grado, podrá componerse una ecuacion numérica que represente cualquiera de ellas ó de sus variedades. Se empezará por formar el trinomio $mx^2+2nx+p$ del radical del valor jeneral de y, dando á m el conveniente signo, i á las raices las condiciones necesarias, i todo lo demas será arbitrario: dejando luego sola en el 2.° miembro de la ecuacion la parte radical, se elevará al cuadrado i se ordenará.

Para determinar en jeneral las intersecciones de una curva del 2.° grado con el eje de las x se hará $y=0$ en la ecuacion jeneral, que se reduce á ... $Cx^2+Ex+F=0$, i que da; ...

$$x=-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(E^2-4CF)}$$

Habrá dos intersecciones siendo $E^2 - 4CF > 0$. Siendo $E^2 - 4CF = 0$, las dos intersecciones se reducen á una sola, i el eje de las x es tanjente á la curva; i cuando $E^2 - 4CF < 0$ no habrá interseccion. Semejantemente, haciendo $x = 0$, se encuentra que las condiciones para que la curva corte, toque, ó no corte ni toque al eje de las y son $D^2 - 4AF$ positivo, nulo ó negativo.

La ecuacion jeneral tiene *seis* coeficientes, reductibles á *cinco* dividiendo por uno cualquiera de ellos. Son pues *cinco* las condiciones que en jeneral determinan una curva del 2.° grado, inclusa la que fija su especie si la especie es dada; i dadas las condiciones podrá hallarse la ecuacion de la curva.

Sean los datos únicamente cinco puntos, i supóngase para mayor jeneralidad que no hai entre ellos tres que estén en línea recta. Tómense por ejes coordenados las rectas que unan dos pares de puntos cortándose; i sean a, a', las abscisas de los dos puntos situados en el eje de las x; b, b' las ordenadas de los dos situados en el eje de las y; i a'', b'', las coordenadas del 5.° punto.

Dividida por F la ecuacion jeneral, da... $A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + 1 = 0$.. (M)

Sustituidas las coordenadas $(a, 0), (a', 0), (b, 0), (b', 0), (a'', b'')$, de los cinco puntos, se obtiene;

$$\left.\begin{array}{l} C'a^2 + E'a + 1 = 0 \\ C'a'^2 + E'a' + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A'b^2 + D'b + 1 = 0 \\ A'b'^2 + D'b' + 1 = 0 \end{array}\right\} A'b''^2 + B'a''b'' + C'a''^2 + D'b'' + E'a'' + 1 = 0$$

De estas cinco ecuaciones saldrán los valores de los cinco coeficientes para llevarlos á (M); i la curva que pase por los puntos dados será de la especie que indique el valor resultante para el binomio $B'^2 - 4A'C'$.

Las 4 primeras dan; $A' = \frac{1}{bb'}$; $C' = \frac{1}{aa'}$; $D' = -\frac{b+b'}{bb'}$; $E' = -\frac{a+a'}{aa'}$; i en la 5.ª se hallará B'.

Si hai tres de los cinco puntos en línea recta, esta recta i la de los dos puntos restantes forman una variedad de la hipérbola si se cortan, ó de la parábola si son paralelas.

Estando en línea recta cuatro puntos, el problema es notoriamente indeterminado, pues que por el punto aislado pueden pasar infinitas rectas: i asi es que de las cuatro primeras ecuaciones solo podrian sacarse entonces los valores de dos coeficientes para sustituir en la 5.ª

Por último, si los cinco puntos dados estuviesen todos en línea recta, representaria ella una variedad de la parábola.

Veamos ahora como ha de introducirse la respectiva condicion analítica para que la ecuacion... $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ ... (N) represente elipse, hipérbola ó parábola.

Para las *elipses* debe ser $B^2 - 4AC < 0$; ó bien... $B^2 - 4AC = -K^2$, siendo K una cantidad real.

Sale de aquí $C = \frac{B^2 + K^2}{4A}$; i en (N).. $4A^2y^2 + 4ABxy + (B^2 + K^2)x^2 + 4ADy + 4AEx + 4AF = 0$.

O simplemente... $4A^2y^2 + 4ABxy + (B^2 + K^2)x^2 + Dy + Ex + F = 0$; supuesto que en el estado de la cuestion pueden ser arbitrarias las tres últimas constantes, porque no hai relacion alguna necesaria entre ellas.

Cambiando $-K^2$ en K^2, será para las *hipérbolas*... $4A^2y^2 + 4ABxy + (B^2 - K^2)x^2 + Dy + Ex + F = 0$.

I haciendo $K^2 = 0$, se tiene para las *parábolas*... $4A^2y^2 + 4ABxy + B^2x^2 + Dy + Ex + F = 0$.

Desapareció C de la ecuacion primitiva, entrando en su reemplazo K; i en las tres ecuaciones obtenidas puede suponerse siempre un coeficiente igual á la unidad, en razon de ser divisibles por cualquiera de ellos. Quedan por tanto cinco coeficientes que determinar para la elipse i la hipérbola, i cuatro solamente para la parábola. Es pues notorio que esta última curva no puede en jeneral satisfacer sino á cuatro condiciones, mientras que las otras dos pueden satisfacer á cinco, siendo compatibles.

LECCION 21.

Líneas del 2.° órden.—*(Conclusion.)*

Debe examinarse, por el método espuesto en la Leccion 17, cuales de las curvas del 2.° grado tienen asíntotas: i sea . . $y = cx + d$ su ecuacion, en que han de determinarse c i d.

Haciendo $y = cx$ en la ecuacion jeneral, resulta; . . $(Ac^2 + Bc + C)\,x^2 + (Dc + E)\,x + F = 0$.

La ecuacion de condicion es . . $Ac^2 + Bc + C = 0$; de donde . . $c = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}$.. (1)

1.° . . $B^2 - 4AC < 0$; c imajinaria. No hai asíntotas para la *elipse*, como ya se sabia por el hecho de ser curva cerrada.

2.° . . $B^2 - 4AC > 0$; valores reales para c, i falta ver si para d los hai reales i finitos.

En la ecuacion jeneral; $y = cx + d \mid (Ac^2 + Bc + C)\,x^2 + (2Acd + Bd + Dc + E)\,x + Ad^2 + Dd + F = 0$

O bien; . . $Ac^2 + Bc + C + \frac{(2Ac + B)\,d + Dc + E}{x} + \frac{Ad^2 + Dd + F}{x^2} = 0$

$$x = \infty \mid (2Ac + B)\,d + Dc + E = 0\text{; i . . } d = -\frac{Dc + E}{2Ac + B} = -\frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{(B^2 - 4AC)}}$$

Por ser $B^2 - 4AC$ positivo, son reales i finitos los dos valores que salen para d, correspondientes á los dos de c. *La hipérbola* tiene dos asíntotas, representadas por la ecuacion;

$$y = \left(-\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}\right)x - \frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{(B^2 - 4AC)}}$$

3.° . . $B^2 - 4AC = 0$; un valor real para c, pero d es infinita. La asíntota es . . $y = -\frac{B}{2A}\,x \pm \infty$;

una tanjente situada en el infinito, en direccion paralela al diâmetro $y = -\frac{Bx + D}{2A}$. No hai pues asíntota para la *paràbola*; pero esta curva tiende constantemente ácia la línea recta, en direccion paralela al diámetro, mientras que la hipérbola tiende á confundirse con dos rectas que se cortan, que son sus asíntotas.

Dícese que la hipérbola es *equilàtera*, cuando sus asíntotas son perpendiculares.

Designando por c', c'', las dos raices de la ecuacion (1), que son los coeficientes de x en las ecuaciones de las dos asíntotas, es $c'c'' = \frac{C}{A}$; i como la condicion de perpendicularidad, para ejes rectangulares, es $c'c'' = -1$, ó bien . . . $\frac{C}{A} = -1$, se tiene para este caso $C = -A$ en la ecuacion jeneral. Mas adelante se verá que esta condicion está ligada con la de $B = 0$, siendo la hipérbola equilátera con respecto á las hipérbolas en jeneral lo que el círculo con respecto à las elipses.

La suma de las mismas raices es . . $c' + c'' = -\frac{B}{A}$; de manera que, para el caso de ejes oblicuos, la condicion de perpendicularidad de las asíntotas será . . $1 + \frac{C}{A} - \frac{B}{A}\cos\theta = 0$; ó bien . . $A + C = B\cos\theta$.

Tràtase por ùltimo de reducir á su mas sencilla espresion las ecuaciones de las tres curvas del 2.° grado, aplicando los principios de la trasformacion de coordenadas, i las teorías de los centros i diámetros.

Buscando el centro para las curvas de la ecuacion . . . $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, se hallaron para sus coordenadas (Leccion 12, (4), (5)) estos valores jenerales; . . . $a = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}$;

$b = -\frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC}$. La operacion se practicó pasando á ejes paralelos, i determinando a i b, coordenadas del nuevo oríjen, por la condicion de desaparecer los términos en y i en x.

En los casos de $B^2 - 4AC <$ ó > 0, que son los de la *elipse* i la *hipérbola*, hai centro; i para el caso de $B^2 - 4AC = 0$, que es el de la *paràbola*, el centro está en el infinito, ó hai infinitos centros si la curva se convierte en dos rectas paralelas por ser tambien . . . $BD - 2AE = 0$, $BE - 2CD = 0$.

Las ecuaciones de condicion fueron; . . . $2Ab + Ba + D = 0$ . . (2); $2Ca + Bb + E = 0$ . . (3).

I la ecuacion referida al centro como oríjen; . . $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0$ . . (4).

En (4) los tres primeros términos son los de la ecuacion primitiva; i el último, F', es su primer miembro, reemplazadas la y por b i la x por a.

Es decir; . . $F' = Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F$; en donde, propuesta una ecuacion numérica, habrán de introducirse los valores obtenidos para a i b.

Puede simplificarse notablemente el valor de F', como va á verse.

$(2) \times b + (3) \times a \} \ldots 2Ab^2 + 2Bab + 2Ca^2 + Db + Ea = 0$.

Añadiendo ahora á ambos miembros el trinomio $Db + Ea + 2F$, se obtiene;

$2(Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F) = 2F' = Db + Ea + 2F$; . . $F' = \frac{1}{2}(Db + Ea + 2F)$.

Si se quisiese tenerlo en funcion de los coeficientes de la ecuacion, se introducirian aquí los valores jenerales de a i b, i resultaria; . . . $F' = \dfrac{AE^2 - BDE + CD^2}{B^2 - 4AC} + F$.

Sirva de ejemplo la ecuacion . . $2y^2 - 3xy + x^2 - 5x + 6 = 0$, de una hipérbola.

Es en ella $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$, $D = 0$, $E = -5$, $F = 6$; i las sustituciones dan;

$a = -20$; $b = -15$; $F' = 56$. La trasformada al centro es . . $2y^2 - 3xy + x^2 + 56 = 0$.

La ecuacion (4) . . $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + F' = 0$ representa las dos curvas con centro, situado el oríjen en el centro: supónense rectangulares los ejes, pues que siempre puede reducirse á ellos. Para referirla á diámetros conjugados se variará la direccion de los ejes, i se igualará á *cero* en la trasformada el coeficiente de xy. Sea $\alpha = \grave{a}ng.(x'x)$; $\mathfrak{C} = \grave{a}ng.(y'x)$.

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\mathfrak{C} \qquad y = x'\,sen\,\alpha + y'\,sen\,\mathfrak{C}$$

$$\left.\begin{array}{l}(A\,sen^2\mathfrak{C} + B\,sen\,\mathfrak{C}\cos\mathfrak{C} + C\cos^2\mathfrak{C})\,y'^2 + (A\,sen^2\alpha + B\,sen\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)\,x'^2 \\ + (2A\,sen\,\alpha\,sen\,\mathfrak{C} + B\,(sen\,\alpha\cos\mathfrak{C} + sen\,\mathfrak{C}\cos\alpha) + 2C\cos\alpha\cos\mathfrak{C})\,x'y' + F'\end{array}\right\} = 0$$

El coeficiente de $x'y'$ igualado á cero, i dividido por $\cos\alpha\cos\mathfrak{C}$, da la ecuacion de condicion; . . $2A\,tanj.\alpha\,tanj.\mathfrak{C} + B(tanj.\alpha + tanj.\mathfrak{C}) + 2C = 0$ . . . (5); que indica haber infinitos sistemas de diàmetros conjugados, pues que para cada posicion del eje de las x', dada por α, hai un valor correlativo de $\mathfrak{C}$ que determina la posicion del eje de las y'.

Combinada (5) con $tanj.\alpha\,tanj.\mathfrak{C} = -1$, dará la posicion de los diámetros conjugados rectangulares, ó *ejes* de la respectiva curva, si los hai.

Se convierte (5) en . . $B(tanj.\alpha + tanj.\mathfrak{C}) + 2(C - A) = 0$; i da . . . $tanj.\alpha + tanj\,\mathfrak{C} = \dfrac{2(A - C)}{B}$

Con esta suma de las tanjentes, i con su producto $= -1$, puede formarse la ecuacion . . . $u^2 - \dfrac{2(A-C)}{B}u - 1 = 0$; cuyas raices, ambas reales por ser negativo el último término, son los valores de $tanj\,\alpha$ i $tanj\,\mathfrak{C}$. Es en consecuencia admisible la condicion de perpendicularidad, i la *elipse* i la *hipérbola* tienen un sistema único de diámetros conjugados perpendiculares, ó *ejes*.

Haciendo $A\,sen^2\mathfrak{C} + B\,sen\,\mathfrak{C}\,cos\,\mathfrak{C} + C\cos^2\mathfrak{C} = M$; $A\,sen^2\alpha + B\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + C\cos^2\alpha = N$; la trasformada referida al centro i á los diámetros conjugados perpendiculares es . . $My'^2 + Nx'^2 + F' = 0$ . . (Q), prescindiendo de los acentos de x é y.

Por ser tambien rectangulares los nuevos ejes coordenados, pueden espresarse M i N en funcion de los coeficientes primitivos A, B, C.

$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\pi + \alpha$; . . $sen\,\mathfrak{C} = cos\,\alpha$; $cos\,\mathfrak{C} = -sen\,\alpha$ } Coefic.te de $x'y'$; . . $2(A-C)\,sen\,\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - sen^2\alpha) = 0$

I como $2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = sen\,2\alpha$; $\cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos\,2\alpha$; es . . $(A-C)\,sen\,2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$;

$$\text{i } tanj.2\alpha = -\frac{B}{A-C} \quad . . (6)$$

Se tiene ademas; . . $M = A\cos^2\alpha - B\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + C\,sen^2\alpha$; $N = A\,sen^2\alpha + B\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + C\,cos^2\alpha$.

Sumando; . . . $M + N = A(sen^2\alpha + cos^2\alpha) + C(sen^2\alpha + cos^2\alpha)$; ó bien . . $M + N = A + C$ . . (7).

Restando; . . $M - N = (A-C)(cos^2\alpha - sen^2\alpha) - 2B\,sen\,\alpha\,cos\alpha$; . . $M - N = (A-C)\cos 2\alpha - B\,sen\,2\alpha$ . . (8)

El valor (6) de $tanj.2\alpha$ da; . . $sen\,2\alpha = -\dfrac{B}{\sqrt{(B^2 + (A-C)^2)}}$; $cos\,2\alpha = \dfrac{A-C}{\sqrt{(B^2 + (A-C)^2)}}$

Sustituyendo en (8); . . $M - N = \dfrac{B^2 + (A-C)^2}{\sqrt{(B^2 + (A-C)^2)}}$; ó sea . . $M - N = \sqrt{(B^2 + (A-C)^2)}$ . . (8')

De (7) i (8′), en fin; .. $M=\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(B^2+(A-C)^2)}$; $N=\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(B^2+(A-C)^2)}$.. (R)

Asi, para el ejemplo de arriba, será $M=\frac{1}{2}(3+\sqrt{10})$; $N=\frac{1}{2}(3-\sqrt{10})$; i la hipérbola propuesta, referida al centro i á los diámetros conjugados rectangulares; .. $(3+\sqrt{10})y^2+(3-\sqrt{10})x^2+112=0$; en que el coeficiente de x^2 es negativo, por ser $\sqrt{10}>3$.

Obsérvese que $MN=\frac{1}{4}(4AC-B^2)=-\frac{1}{4}(B^2-4AC)$; i que por tanto el producto MN será positivo, i sus factores M, N tendrán igual signo, cuando $B^2-4AC<0$, (caso de la elipse); i tendrán M, N signos contrarios cuando $B^2-4AC>0$ (caso de la hipérbola), por ser entonces negativo MN.

En consecuencia, suponiendo M, N, F' cantidades positivas, es indispensable para la elipse que F' entre en (Q) con signo contrario á los de M i N, para que la ecuacion no esprese un absurdo i no dé soluciones imajinarias. Debe ser pues de esta forma; . . . $My^2+Nx^2-F'=0$ . . (9)

Si $F'=0$, se reduce (9) á .. $My^2+Nx^2=0$, que solo puede ser satisfecha siendo $x=0$, $y=0$, i que por lo mismo representa el oríjen de las coordenadas. (Un *punto,* variedad de la elipse).

Cuando M i N tienen signos contrarios, puede F' entrar en la ecuacion (Q) con cualquier signo: de modo que, para la hipèrbola, la forma de la ecuacion es .. $My^2-Nx^2\pm F'=0$ . . (10).

Si fuese ahora $F'=0$, se tendria en (10) .. $y=\pm x\sqrt{\frac{N}{M}}$, símbolo de *dos rectas* que se cortan en el oríjen. (Variedad de la hipérbola.)

Dividiendo por F' las ecuaciones (9) i (10), resulta .. $\frac{My^2}{F'}+\frac{Nx^2}{F'}-1=0$; $\frac{My^2}{F'}-\frac{Nx^2}{F'}\pm 1=0$; i á causa de la homojeneidad, para que los dos primeros términos sean en ambas de dimension *nula* es preciso que se tenga . . . $\frac{M}{F'}=\frac{1}{b^2}$, $\frac{N}{F'}=\frac{1}{a^2}$, siendo a, b dos líneas finitas cuyos valores son . . . .

$$a=\pm\sqrt{\frac{F'}{N}},\ b=\pm\sqrt{\frac{F'}{M}}.$$

La sustitucion da — Para la *elipse*; .. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-1=0$; ó bien .. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ .. (11)

——————— Para la *hipérbola* . . . . . $a^2y^2-b^2x^2=\mp a^2b^2$ . . . (12)

Bajo estas últimas formas se dice que las dos curvas estàn referidas *al centro i à sus ejes*; i, como despues se verá, á ellas se llega igualmente para cualesquiera diámetros conjugados finitos. En la ecuacion (12) se toma de ordinario a^2b^2 con el signo negativo: separando sus dos signos, las dos ecuaciones representan dos hipérbolas *conjugadas,* que tienen unos mismos elementos i unas mismas asíntotas.

Falta considerar la curva que no tiene centro, la parábola, cuyo carácter es $B^2-4AC=0$; partiendo de la ecuacion jeneral .. $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ .. (13), que se supone referida á los ejes rectangulares OX, OY, (Fig. 67.)

Para mudar la direccion de los ejes, conservando el oríjen, se hará . . . $x=x'\cos\alpha+y'\cos\mathfrak{C}$, $y=x'\,sen\,\alpha+y'\,sen\,\mathfrak{C}$; i sean OX', OY' los ejes nuevos, todavía indeterminados.

La ecuacion trasformada es .. $A'y'^2+B'x'y'+C'x'^2+D'y'+E'x'+F=0$; siendo los cinco nuevos coeficientes funciones de los primitivos, i de α i $\mathfrak{C}$.

Determínese la posicion de los nuevos ejes por la condicion de desaparecer el 2.° término.

$B'=2A\,sen\,\alpha\,sen\,\mathfrak{C}+B(sen\,\alpha\cos\mathfrak{C}+sen\,\mathfrak{C}\cos\alpha)+2C\cos\alpha\cos\mathfrak{C}=0$ .. (14). Ecuacion de condicion.

Siendo $B'^2-4A'C'=0$ por la especie de la curva, i $B'=0$, resulta necesariamente $A'=0$, ó $C'=0$, ó ambos coeficientes nulos á un tiempo.

Sea $C'=A\,sen^2\alpha+B\,sen\,\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha=0$ . . (15)

Con esto la trasformada se reduce â . . $A'y'^2+D'y'+E'x'+F=0$ . . (16)

Dividida (15) por $cos^2\alpha$ sale; . . $A\,tanj^2\alpha+B\,tanj\,\alpha+C=0$; $tanj\,\alpha=-\frac{B}{2A}\pm\sqrt{\left(\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right)}=-\frac{B}{2A}$

Tiene α valor determinado, dependiente de A i B. Sustituyendo este valor en (14), solo da . . . $B^2-4AC=0$, i por tanto queda indeterminada $\mathfrak{C}$. Segun esto, el eje de las ordenadas puede tener, verificándose la condicion dicha, una posicion cualquiera; i sea la OY', haciendo $\mathfrak{C}=àng.\,XOY'$.

Para pasar á otro sistema de ejes paralelos, trasladando el oríjen á un punto (a, b) de la curva que luego se fijará, ha de ponerse en (16) por x, $x+a$, i por y, $y+b$, prescindiendo de los acentos.

La 2.ª trasformada es . . $A'y^2+(2A'b+D')\,y+E'x+(A'b^2+D'b+E'a+F)=0$.

$2A'b+D'=0$; $A'b^2+D'b+E'a+F=0$ } Ecuaciones de condicion para determinar a i b.

Se obtiene; . . $b=-\frac{B'}{2A'}$; $a=\frac{D'^2-4A'F}{4A'E'}$; i la (16) queda en . . $A'y^2+E'x=0$; que da . . $y^2=-\frac{E'}{A'}x$

Haciendo $2p=-\frac{E'}{A'}$, será . . $y^2=2px$ . . (17). Es la ecuacion simplificada de la paràbola, siendo diámetro el eje de las x con respecto á las cuerdas paralelas al eje de las y, i estando el oríjen en un punto de la curva. Este nuevo eje de las x, paralelo al anterior, forma con el primitivo OX el mismo ángulo α cuya tanjente es . . $-\frac{B}{2A}$; i su posicion depende del valor de $b=\frac{D'}{2A'}$, i por consiguiente del de ϵ; porque $A'=A\,sen^2\epsilon+B\,sen\,\epsilon\,cos\,\epsilon+C\,cos^2\epsilon$; i $D'=D\,sen\,\epsilon+E\,cos\,\epsilon$. El eje correlativo de las y, dado por el valor que se asigne a ϵ, es notoriamente tanjente a la curva, i su punto de contacto es el oríjen.

Sea vgr. *áng.* $XEY''=XOY'$ el valor asignado á ϵ. Será EY'' el eje de las ordenadas; su punto O' de contacto el oríjen; i $O'X''$ el diàmetro eje de las abscisas. Si disminuyese ϵ, el oríjen O' estaria situado mas arriba.

"La parábola tiene pues infinitos diámetros, todos paralelos entre sí."

Si los nuevos ejes han de ser rectangulares, como los primitivos, queda determinada ϵ por la condicion *tanj.* α *tanj.* $\epsilon=-1$, i no puede pasarse sino de un solo modo de la ecuacion (13) a la (16) i a la (17). Entónces A' i C' tienen los valores jenerales (R), a saber;

$A'=M=\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(B^2+(A-C)^2)}$; $C'=N=\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(B^2+(A-C)^2)}$; en que se advertirá que N se reduce a *cero* por ser $B^2-4AC=0$.

En caso de ser a un mismo tiempo $A'=0$, $C'=0$, se reduce (16) á. . $D'y'+E'x'+F=0$, que representa *una lìnea recta*; i si fuese $C'=0$, $E'=0$, quedaria. . . $A'y'^2+D'y'+F=0$, que representa *dos rectas paralelas* al eje de las x: las dos variedades de la parábola.

Es pues reductible cualquiera ecuacion del 2.º grado entre las variables x é y á una de las tres formas sencillas, . . . $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, . . . $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, . . . $y^2=2px$, segun fuere elipse, hipérbola ó parábola lo que ella represente; i esta reduccion puede obtenerse de infinitos modos, pasando á ejes oblicuos, i de uno solo pasando a rectangulares. Las dos primeras todavía admiten simplificacion por trasformacion de coordenadas, como aparece de los ejemplos 1.º i 2.º, Leccion 11.

Reemplazando x por $x-a$ en la 1.ª ecuacion, i por $x+a$ en la 2.ª pueden ser representadas las tres curvas por $y^2=2px+qx^2$; en que el oríjen se halla en un punto de la curva, i que notoriamente espresará elipse, hipérbola o parábola segun fuere q negativa, positiva ó nula.

LECCION 22.

La Elipse.

SECCION 14—La Elipse.

Su ecuacion referida al centro i á los ejes es ((11) Leccion 21) . . . . $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ . . . (1)

Ya se sabe, i la ecuacion lo dice, que la curva es simétrica con respecto a los dos ejes.

Resuelta (1) en una i otra variable, da; . . . $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$; . . . $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$

Tiene y dos valores iguales reales cuando $x<\pm a$; nulos si $x=\pm a$; imajinarios si $x>\pm a$.

Tiene x dos valores iguales reales cuando $y<\pm b$; nulos si $y=\pm b$; imajinarios si $y>\pm b$.

"Limitan pues a la elipse las ordenadas correspondientes a $x = a = Oa$, $x = -a = Oa'$, (Fig. 68); i las abscisas correspondientes á $y = b = Ob$, $y = -b = Ob'$; i es continua, i cóncava ácia los ejes, *mayor* aa', i *menor* bb', entre los cuatro *vértices* a, a', b, b'.»

Los ejes la dividen en cuatro *cuadrantes* iguales.

Para una abscisa $x = Op$ es $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - \overline{Op}^2)}$. Levantando en p una perpendicular, i trazando de O como centro i con radio $Oa = a$ (*semieje mayor*) una circunferencia de círculo que corta en n á la perpendicular, resulta; .. $np = \sqrt{(\overline{On}^2 - \overline{Op}^2)} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; .. $y = \frac{b}{a} \times np$; .. $a : b :: np : y$

Por tanto, para hallar la ordenada correspondiente á $x = Op$, tràcese otra circunferencia concéntrica con radio $Ob = b$ (*semieje menor*), i por el punto s en que corta á On tírese sm paralela á Op: la ordenada buscada será mp, i m punto de la curva, por cuanto el triángulo Onp da ....

$$On = a \,:\, Os = b :: np \,:\, mp = y.$$

Así por medio de las dos circunferencias pueden determinarse diversos puntos de la elipse: i á virtud de la simetría, cada punto hallado m da otros tres puntos m', m'', m'''.

En la Leccion 6,ª cuestion 2,ª se halló otro trazado para la elipse.

Si $b = a$, la ecuacion (1) se reduce á .. $y^2 + x^2 = a^2$; que representa el círculo esterior.

Para una misma abscisa será en el círculo .. $Y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, i en la elipse .. $y = \frac{b}{a} \times Y$; de donde sale nuevamente la proporcion de arriba; .. $a \,:\, b :: Y \,:\, y$.

Como $a > b$, es siempre $Y > y$ para una misma abscisa. «El círculo trazado con el semieje mayor encierra á la elipse, siéndole tanjente en los vértices a, a'». Tambien se hallará que la elipse encierra al círculo trazado con el semieje menor, siéndole tanjente en b i b'.

Otro círculo concéntrico (Fig. 69), cuyo radio sea $r < a$ i $> b$, tiene por ecuacion ... $y^2 + x^2 = r^2$ (2).

Eliminando y entre (1) i (2) sale ... $x = \pm a \sqrt{\left(\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2}\right)}$; i para cada valor de x es $y = \pm b \sqrt{\left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}\right)}$.

Es pues $Op = Op'$, $Oq = Oq'$; i los cuatro puntos de interseccion A, B, C, D, determinan un rectángulo de lados paralelos á los ejes. Por consiguiente, dada la curva i conocido el centro, pueden determinarse los ejes valiéndose del círculo.

Para un punto m de la elipse (Fig. 70) se tiene ... $a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$.

Prolongando la ordenada, para uno esterior D será ... $a^2 (y + mD)^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 > 0$.

Para otro interior E en la misma direccion ..... $a^2 (y - mE)^2 + b^2 x^2 - b^2 a^2 < 0$.

Segun esto «la sustitucion por x i por y de los valores de las coordenadas de un punto del plano en la ecuacion de la elipse, descubre si el punto se halla en la curva, ó fuera ó dentro de la curva.»

Llámanse *radios* de la elipse las rectas tiradas del centro á cualesquiera puntos de la circunferencia.

Para un punto m, será el radio $Om = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} \sqrt{((a^2 - b^2) x^2 + a^2 b^2)}$

El valor del radio es variable, depende de x, i crece creciendo x.

$x = 0$, .. $R = b$; $x = \pm a$, ... $R = \pm a$ } Los dos semiejes son los radios máximo i mínimo.

La ecuacion de la curva da .... $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a - x)(a + x)$ .... (3)

Para un punto m es $Op = x$, $ap = a - x$, $a'p = a + x$, $mp = y$; ... $\overline{mp}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times ap \times a'p$.

Para otro punto m' seria ..... $\overline{m'p'}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times ap' \times a'p'$.

I formando proporcion con las dos ecuaciones, resulta «que los cuadrados de las perpendiculares bajadas de diversos puntos de la elipse sobre uno de los ejes, son entre sí como los productos de los segmentos determinados en el mismo eje:» propiedad que caracteriza a la elipse, i que pudiera servir para definirla i para deducir su ecuacion.

Si se hiciese $a = b$, la elipse se convertiria en círculo, i (3) daria ... $y^2 = (a - x)(a + x)$; á saber, «que en el círculo la perpendicular bajada de un punto de la circunferencia sobre un diámetro es media proporcional entre sus dos segmentos:» verdad jeométrica bien conocida.

Si el oríjen de las coordenadas se traslada al vértice a, reemplazando en (1) la x por $x-a$, se obtiene ... $a^2y^2+b^2(x-a)^2=a^2b^2$; ó bien ... $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$ ... (4).

Haciendo $\frac{b^2}{a}=p$, de donde $b^2=ap$, será .. $y^2=\frac{ap}{a^2}(2ax-x^2)$; es decir ... $y^2=2px-\frac{p}{a}x^2$ ... (5).

La línea finita $2p=\frac{ab^2}{a}$, se llama *paràmetro*, i puede construirse «hallando una tercera proporcional á los ejes mayor i menor;» pues que ... $2a:2b::2b:\frac{2b^2}{a}$. Como se verá, el *parámetro* es en las tres curvas del 2.º grado la doble ordenada del *foco*, i elemento de notable importancia.

Puesta la ecuacion de la elipse bajo la forma (5), que es la misma del fin de la Leccion 21 siendo q negativa, se dice referida la curva al vértice, al eje mayor i al parámetro.

Focos de la elipse — Llámanse *focos* de la elipse dos puntos tales, situados en su plano, que la suma de sus distancias á cualquier punto de la curva es siempre una misma, é igual con el eje mayor.

Para determinar su posicion se resolverá aquí de nuevo, para coordenadas rectangulares, la cuestion inversa antes resuelta para coordenadas polares (Leccion 6,ª cuestion 4.ª); á saber — «Hallar el lugar jeométrico de los puntos cuya suma de distancias á dos puntos fijos, F, F', (Fig. 71) sea constante é igual á una magnitud finita $2a$.»

Sea $FF'=2c$, i tómese esta recta por eje de las abcisas: sea eje de las ordenadas la perpendicular OB que divide por mitad á FF'. Si m es un punto (x,y) de la curva ó lugar jeométrico buscado, se tiene ... $F'm+Fm=2a$ ... (6); $F'\overline{m}^2=y^2+(c+x)^2$ ... (7); $F\overline{m}^2=y^2+(c-x)^2$ ... (8)

(7)—(8); .. $F'\overline{m}^2-F\overline{m}^2=4cx$ } I dividiendo esta cuestion por la (6); .. $F'm-Fm=\frac{2cx}{a}$ .. (9)

Conocidas ya la suma (6) i la diferencia (9) de $F'm$ i Fm es .. $F'm=a+\frac{cx}{a}$; $Fm=a-\frac{cx}{a}$ (10)

Llevando ahora á una de las ecuaciones (7), (8), respectivamente, el valor de $F'm$ ó Fm, i reduciendo, sale; ... $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$ ... (11); en donde, por ser $F'm+Fm>FF'$, ó bien $2a>2c$, es $a>c$, i a^2-c^2 una cantidad positiva.

Haciendo pues $a^2-c^2=b^2$, i sustituyendo en (11), queda ... $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$; ecuacion de una elipse referida al centro i a sus ejes $2a$ i $2b$, i en que es conocida la posicion de los focos.

De .. $a^2-c^2=b^2$ se saca .. $c=\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$ valores de las abscisas de los dos focos. Resulta pues que los focos se hallan situados en el eje mayor, dentro de la elipse por ser $c<a$, i equidistantes del centro la magnitud $c=\sqrt{(a^2-b^2)}$ que se llama *escentricidad*. Para construirlos, del estremo B del eje menor como centro, i con radio $=a$, se trazará un arco que ha de cortar al eje mayor AA' en los dos puntos buscados, F i F'. Denomínase *radios vectores* á $F'm$ i Fm: i como se ve, sus valores (10) son «funciones racionales de la respectiva abscisa,» estando referida la elipse al centro i á sus ejes; circunstancia mui notable, característica de la curva, la cual se verifica tambien con cualesquiera otros ejes coordenados paralelos.

Las distancias AF, $A'F$ del foco F á los dos vértices tienen por espresiones .... $a-\sqrt{(a^2-b^2)}$, $a+\sqrt{(a^2-b^2)}$, i su producto es b^2; de manera que «el semieje menor es medio proporcional entre estas dos distancias.»

Si en la ecuacion (1) de la curva se hace $x=\pm c=\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$ para hallar la ordenada focal, se obtendrá .. $y=\pm\frac{b^2}{a}=\pm p$; que es la mitad del *parámetro*, de que se habló arriba.

Para un punto d situado fuera de la elipse, tirando las rectas dF', dF i mF, se obtiene ... $dF'+dF>mF'+mF=2a$; i para un punto interior e, semejantemente, $eF'+eF<mF'+mF=2a$.

Por lo dicho, para hallar dos puntos de la elipse dados los ejes i situados los focos F, F', setrazará de F como centro i con radio cualquiera $Ap>AF$ una circunferencia, i otra de F' con radio $A'p$: en los puntos de interseccion se verificará que $Fm+F'm=2a$. I para trazar la curva por continuidad se fijarán en F i F' los estremos de un hilo $=2a$, i se templará luego este hilo con la punta de un lápiz que recorra el papel.

Directrices de la elipse — Corresponde á cada foco una recta *directriz*, cuya posicion es tal que las

distancias de cualquier punto de la elipse al foco i á la directriz están en relacion constante. Va á determinarse su posicion probando primero que es perpendicular al eje mayor, i hallando luego la magnitud de la abscisa de su pie.

1.°—Sea GH (Fig. 72) la directriz del foco F, i k la relacion constante indicada. Para un punto m de la curva, entre el radio vector Fm i la perpendicular mq sobre GH se verificará.... $\frac{Fm}{mq}=k$, ó $Fm=k\times mq$; i tirando mm' perpendicular sobre OA, i $m'q'$ sobre GH, será tambien... $Fm'=k\times m'q'$. I por cuanto $Fm=Fm'$, es $mq=m'q'$, $mm'qq'$ un paralelógramo rectángulo, i GH perpendicular sobre OA.

2.°—Sea $\alpha=OD$ la abscisa del pie de la directriz, i $x=Op$ la del punto m.

$Fm=a-\frac{cx}{a}$; $mq=pD=\alpha-x$ } Como $Fm=k\times mq$, es... $a-\frac{cx}{a}=k(\alpha-x)$...(12).

Debe hallarse α; i pues que (12) se verifica para todo valor de x, haciendo $x=0$ se obtiene... $a=k\alpha$...(12').

Haciendo en seguida $x=a$, se obtiene... $a-c=k\alpha-ka=a-ka$;.. $c=ka$;... $k=\frac{c}{a}$..(13).

La sustitucion de este valor de k en (12') da... $\alpha=\frac{a^2}{c}$; ó bien... $c:a::a:\alpha$. La abscisa del pie de la directriz es pues una tercera proporcional á la escentricidad i al semieje mayor: i como $\alpha>a$ por ser $a>c$, se advierte que está la directriz fuera de la elipse.

El valor constante (13), $k=\frac{Fm}{mq}=\frac{c}{a}$, espresa «que el radio vector de un punto es á la distancia del mismo punto á la directriz, como la escentricidad al semieje mayor.» De modo que, determinado el punto m'' en que $Fm''=OF=c$, i cuya abscisa es Op', resulta $p'D=a$, i así podrá situarse con prontitud la directriz del foco positivo F.

Tomando ácia la izquierda del centro O, i sobre el eje mayor, la misma magnitud OD, se situaria la directriz del foco negativo.

LECCION 23.

La Elipse.—(*Continuacion*).

Propongámonos en jeneral—«Hallar el lugar jeométrico de los puntos del plano cuyas distancias á un punto dado F (Fig. 73) i á una recta dada GH estén en cierta relacion constante, i sea $\frac{m}{n}$.»

Tírese $FD=d$, perpendicular sobre GH i magnitud conocida. Se observa desde luego que para cada punto $m(x,y)$, superior á DF, en que se verifique que $Fm:mq::m:n$, hai otro m' simétricamente colocado que da una proporcion igual... $Fm':m'q'::m:n$, i que por tanto la recta DF es eje de la curva buscada: se la tomará por eje de las abscisas.

Dividiendo en O á $DF=d$, de manera que sea $OF:OD::m:n$, será tambien punto de la curva el punto O: se le tomará por oríjen, i por eje de las ordenadas la perpendicular OY. Va ahora á buscarse la relacion entre Fm i mq en funcion de las coordenadas del punto m, que se supone ser del lugar jeométrico pedido.

$$\left.\begin{array}{l} OF+OD=d:OF::m+n:m;\ldots OF=\frac{md}{m+n} \\ OF+OD=d:OD::m+n:n;\ldots OD=\frac{nd}{m+n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} Fm=\sqrt{(m\bar{p}^2+F\bar{p}^2)}=\sqrt{\left(y^2+\left(x-\frac{md}{m+n}\right)^2\right)} \\ mq=Op+OD=x+\frac{nd}{m+n} \end{array}$$

Conforme á la cuestion, $Fm:mq::m:n$; ó bien... $\sqrt{\left(y^2+\left(x-\frac{md}{m+n}\right)^2\right)}:x+\frac{nd}{m+n}::m:n$.

Igualando los productos de estremos i medios, elevando al cuadrado i reduciendo, sale;

$$n^2y^2+(n^2-m^2)x^2-2mndx=0\ldots(1)\ldots\text{Ecuacion buscada.}$$

Representa (1) una de las tres curvas del 2.° grado; i como carece de término en xy, será *elipse*, *hipérbola* ó *paràbola* (Leccion 19), segun fuere positivo, negativo ó nulo el coeficiente de x^2; esto es, segun fuere $m<n$, $m>n$, ó $m=n$. De manera que, la distancia al punto fijo es menor en la elipse, mayor en la hipérbola, é igual en la parábola, con respecto á la distancia á la directriz.

En el caso de la elipse, $m<n$, el punto F es un foco, pues que $Fm=\frac{m}{n}\left(x+\frac{nd}{m+n}\right)$ es funcion racional de x: todos los elementos de la curva pueden hallarse en funcion de los datos de la cuestion.

Haciendo en (1) $y=0$, se obtiene $x=0$, i $x=\frac{2mnd}{n^2-m^2}$ que es el valor del eje mayor $2a$.

Abscisa del centro... $x=a=\frac{mnd}{n^2-m^2}$ } Sustituyendo en (1); ... $y=\frac{md}{\sqrt{(n^2-m^2)}}=b$; semieje menor.

Escentricidad; ... $c=\sqrt{(a^2-b^2)}=\frac{m^2d}{n^2-m^2}$. Parámetro; ... $2p=\frac{2b^2}{a}=\frac{2md}{n}$. Directriz, recta GH.

Sea ahora, en la misma cuestion, $y=ax+b$ la ecuacion de la recta dada, i α, $\mathfrak{E}$ las coordenadas del punto fijo: sean x', y' las coordenadas de un punto cualquiera del lugar jeométrico.

La distancia del punto (x', y') á la directriz es (Leccion 8,ª cuest. 3.ª) ... $\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{(1+a^2)}}=mq$.

La distancia del mismo punto al foco $(\alpha, \mathfrak{E})$ es ... $\sqrt{((x'-\alpha)^2+(y'-\mathfrak{E})^2)}=Fm$.

De la proporcion de arriba sale ... $Fm=\frac{m}{n}\times mq$; en que, para la elipse, es $\frac{m}{n}$ un quebrado propio.

Si se escribe pues que la 2.ª distancia es igual á la 1.ª multiplicada por una constante $k<1$, se obtendrá en x', y' jeneralizadas la ecuacion de la elipse; ... $\sqrt{((x-\alpha)^2+(y-\mathfrak{E})^2)}=\frac{k(y-ax-b)}{\sqrt{(1+a^2)}}$ ..(2)

Desaparecerian los radicales elevando al cuadrado.

Tiene (2) cinco constantes indeterminadas, a, b, α, $\mathfrak{E}$ i k, como la ecuacion jeneral del 2.° grado; lo cual confirma ser necesarias cinco condiciones para determinar una elipse. Dada la directriz, se conocen a i b, i solo quedan por determinar tres constantes. Dado el foco, son conocidas α i $\mathfrak{E}$, i sucede lo mismo. Por tanto, «el dato de laposicion de un foco ó de una directriz equivale á dos condiciones para la determinacion de la curva.»

Desenvolviendo la ecuacion (2), i comparándola con la de una elipse dada, se determinarian las dos directrices, los focos i la relacion k.

Tanjentes à la elipse. Situados los focos pueden tirarse por simples procedimientos jeométricos.

Problema 1.°—Por un punto m de la curva (Fig. 74). Tirados los dos radios vectores, tómese $mn=Fm$, i tírese md perpendicular sobre Fn. Será md bisectriz del ángulo Fmn; dividirá en d por mitad á Fn; i se probará que es tanjente haciendo ver que todos sus puntos, esceptuado m, están fuera de la curva.

Para e; ... $en=eF$; $eF'+en>F'n=2a$, $eF'+eF>2a$. Está fuera de la curva (Leccion 22).

Problema 2.°—Desde un punto esterior e. Trácese una circunferencia de círculo de e con radio eF, i otra de F' con radio $AA'=2a$: se cortarán en dos puntos, i sea n uno de ellos. Tírese Fn, i en su punto medio d levántese una perpendicular: pasará por e, por ser punto equidistante de F i n, i será tanjente cuyo punto de contacto m lo da la recta $F'n$, por ser tambien equidistante de F i n. Se prueba como antes que todos los demas puntos se hallan fuera de la curva.

Nòtese que $Od=a$; porque siendo O i d puntos medios de FF' i Fn, es $Od=\frac{1}{2}F'n=a$. De aquí resulta «que el círculo descrito sobre el eje mayor de la elipse como diámetro, es lugar jeométrico de los pies de las perpendiculares tiradas desde los focos sobre todas las tanjentes;» i que en consecuencia pudiera tirarse la tanjente por el punto e buscando el punto d como interseccion de ese círculo con otro trazado sobre eF como diámetro. Este método es el mismo practicado para tirar tanjentes á un círculo desde un punto esterior: su centro representa los dos focos de la elipse, confundidos allí por el crecimiento del eje menor.

La normal mq, paralela á Fn, bisecta el ángulo FmF' de los radios vectores; i los ángulos $F'md$, $F'me$, que estos forman con la tanjente, son iguales. Si Fm fuese un rayo luminoso, ó sonoro, su rayo reflejo seria mF', es decir, pasaria por el otro foco.

A virtud de lo antedicho, si Fd, $F'e$, son dos perpendiculares tiradas de los focos sobre la tanjente ed, los triángulos Fdm, $F'em$ son semejantes, i dan;... $dm : em :: Fd : F'e :: Fm : F'm$; esto es, «que los segmentos de la tanjente, i las perpendiculares, son proporcionales con los radios vectores del punto de contacto.»

La ecuacion de una tanjente à la elipse es deducible de cualquiera de las construcciones esplicadas, traduciéndolas en procedimientos analíticos.

Empleado el método jeneral de las Lecciones 14 i 15, para la elipse referida al centro i á sus ejes, designadas por x', y' las coordenadas del punto de contacto, la ecuacion jeneral de la tanjente es.... $a^2y'(y-y')+b^2x'(x-x')=0$; ó bien.. $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$.. (3), por cuanto .. $-a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2$.

Directamente se prueba ser (3) una tanjente, sumando la ecuacion $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$ con la identidad $a^2y^2+b^2x^2=a^2y^2+b^2x^2$, i restando el duplo de (3).

Resulta.... $a^2(y-y')^2+b^2(x-x')^2=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2$, que es todavía la ecuacion de la recta (3) aunque aparenta ser del 2.° grado, i en que x, y son las coordenadas jenerales de la misma recta. Aquí todos los valores de x é y diferentes de x', y', dan valor positivo al primer miembro i por consiguiente al segundo; i cuando $x=x'$, $y=y'$, se obtiene.... $a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0$; lo cual manifiesta que el punto x', y' de la recta está en la curva, i todos los demas se hallan fuera de ella. (Leccion 22.)

Tratándose de tirar la tanjente por un punto cualquiera (α, ε) del plano, se encontró en la Leccion 14 que hai dos tanjentes, una sola, ó ninguna, segun fuere positiva, nula ó negativa la espresion.... $a^2\varepsilon^2+b^2\alpha^2-a^2b^2$; es decir, segun estuviere situado el punto, fuera de la elipse, en ella, ó dentro de ella, lo cual es evidente.

Haciendo en (3) $y=0$, sale $x=\frac{a^2}{x'}$, abscisa de la interseccion q de la tanjente mq con el eje de las x (Fig. 75); independiente de b, i una misma por tanto para todas las elipses que tengan comun el eje $2a$, si es una misma la abscisa Op de los puntos de contacto. «Para tirar pues una tanjente en el punto m de una elipse, puede trazarse sobre el eje AA' un círculo; tirársele una tanjente por el punto n en que corta á la circunferencia la ordenada pm prolongada; i unirse luego el punto q de interseccion de esa tanjente con la prolongacion de AA', i el punto dado m, por medio de la recta qm.»

Si de $Oq=\frac{a^2}{x'}$ se resta $Op=x'$, se tendrá la subtanjente $pq=\frac{a^2-x'^2}{x'}$

Para la tanjente tirada en el estremo de la ordenada de un foco es $x'=\pm c$, i por tanto $Oq=\pm\frac{a^2}{c}$, que es el mismo valor de la respectiva abscisa α del pie de la directriz (Leccion 22). Se confunden pues el pie de la tanjente focal i el de la directriz.

La ecuacion (3) da .. $y=-\frac{b^2x'}{a^2y'}x+\frac{b^2}{y}$, en que el coeficiente de x es la tanjente trigonométrica del ángulo que la tanjente á la elipse forma con el eje de las abscisas.

Designándolo por A, se tiene; .. $tanj.\ A=-\frac{b^2x'}{a^2y'}=-\frac{b^2x'}{a^2\times\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x'^2)}}=-\frac{bx'}{a\sqrt{(a^2-x'^2)}}$;

espresion cómoda para examinar la curvatura de la elipse, segun las reglas establecidas al fin de la Leccion 16. Por ella se reconoce que la tanjente puede tener con respecto al eje de las x todas las inclinaciones comprendidas entre la posicion perpendicular i la posicion paralela.

Bùscase ahora la ecuacion de la tanjente paralela á una recta dada .. $y=mx+q$... (4)

Siendo (x', y') el punto desconocido de contacto, se tiene desde luego ... $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$.. (3)

I para que la tanjente sea paralela á la recta (4) debe ser .. $-\frac{b^2x'}{a^2y'}=m$; ò bien .. $a^2my'+b^2x'=0$.. (5)

Por estar en la curva el punto (x', y'), se agrega ... $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$ ... (6)

La eliminacion entre (5) i (6) da; . . $x' = \pm \frac{a^2 m}{\sqrt{(b^2 + a^2 m^2)}}$; $y' = \mp \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 + a^2 m^2)}}$;

I sustituyendo en (3); . . $y = mx \pm \sqrt{(b^2 + a^2 m^2)}$ . . (7). Ecuacion buscada.

El doble signo del radical, esencialmente real, indica que puede siempre tirarse dos tanjentes paralelas en la direccion dada, v. gr. las cd, $c'd'$ (Fig. 76). La cuerda de contacto mm' está representada por la ecuacion (5), jeneralizadas x' é y': se reconoce ser ella un diámetro, i construyéndolo pueden determinarse los puntos de contacto.

Tràtase en fin de tirar á la elipse dos tanjentes que formen entre sí un ángulo dado V; i sean α, ε las coordenadas desconocidas de su punto de concurso.

Ecuaciones de las dos tanjentes. (Leccion 14.)
$$\left.\begin{array}{l}(a^2\varepsilon + \alpha M)y + (b^2\alpha - \varepsilon M)x = a^2\varepsilon^2 + b^2\alpha^2 \\ (a^2\varepsilon - \alpha M)y + (b^2\alpha + \varepsilon M)x = a^2\varepsilon^2 + b^2\alpha^2\end{array}\right\} \text{Siendo } M = \sqrt{(a^2\varepsilon^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)}$$

O bien . . . $y = ax + b$, $y = a'x + b'$; en que . . $a = \frac{\varepsilon M - b^2\alpha}{a^2\varepsilon + \alpha M}$; $a' = -\frac{\varepsilon M + b^2\alpha}{a^2\varepsilon - \alpha M}$; i aplicando la fórmula (F) de la Leccion 8.ª se obtiene;

$$Tanj.\ V = \frac{\frac{\varepsilon M - b^2\alpha}{a^2\varepsilon + \alpha M} + \frac{\varepsilon M + b^2\alpha}{a^2\varepsilon - \alpha M}}{1 - \frac{(\varepsilon M - b^2\alpha)(\varepsilon M + b^2\alpha)}{(a^2\varepsilon + \alpha M)(a^2\varepsilon - \alpha M)}} = \frac{2M}{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \varepsilon^2}; \text{ ó bien . . } tanj.\ V = \frac{2\sqrt{(a^2\varepsilon^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2)}}{a^2 + b^2 - \alpha^2 - \varepsilon^2} \quad (8)$$

Obteniéndose una sola ecuacion (8) entre α i ε, «hai infinidad de puntos que, como puntos de concurso de pares de tanjentes, satisfacen à la cuestion propuesta:» su lugar jeométrico lo representa la ecuacion misma, i es una curva del 4.º grado cuyas coordenadas jenerales son α i ε.

Para tanjentes perpendiculares entre sí seria $tanj.\ V = \infty$; de donde $a^2 + b^2 - \alpha^2 - \varepsilon^2 = 0$; ó bien . . $\alpha^2 + \varepsilon^2 = a^2 + b^2$; que representa un círculo cuyo radio es $\sqrt{(a^2 + b^2)} = ab = Od$ (Fig. 77), i cuyo centro es el mismo de la elipse. Cualesquiera dos tanjentes eg, eh, que parten de un punto de su circunferencia, son perpendiculares entre sí, i se apoyan por consiguiente en los estremos de un diámetro gh.

LECCION 24.

La Elipse. — (*Continuacion.*)

Normales — Siendo . . . $y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$ la ecuacion de la tanjente á la elipse, referida la curva al centro i á sus ejes, la normal que le es perpendicular tendrá por ecuacion . . . . . $y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$ . . (1); suponiéndolas tiradas ambas por el punto (x', y') de la curva.

Haciendo en (1) $y = 0$, se deduce por valor jeneral de la subnormal; . . $x' - x = \frac{b^2x'}{a^2}$ . . . (2).

Para hallar la ecuacion de la normal tirada por un punto (α, ε) cualquiera, sean x', y' las coordenadas del punto desconocido en que ella cortará á la curva. Para determinarlo se tienen estas dos ecuaciones; . . (En (1)); $\varepsilon - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(\alpha - x')$ . . (A); . . . $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ . . . (B).

La (A) espresa que la normal pasa por el punto (α, ε), i la (B) que el (x', y') pertenece á la elipse.

Sacados entre (A) i (B) los valores de las dos incógnitas x', y', i sustituidos en (1), resultarán tantas normales diversas concurrentes en el punto (α, ε), como soluciones comunes tengan las dos ecuaciones, ambas del 2.º grado.

La eliminacion de y' da; . . $c^4x'^4 - 2a^2c^2\alpha x'^3 + a^2(a^2\alpha^2 + b^2\varepsilon^2 - c^4)x'^2 + 2a^4c^2\alpha x' - a^6\alpha^2 = 0$ . . (C)

Esta ecuacion del 4.° grado, por tener negativo el último término, tiene cuando menos dos raices reales, supuesto que el producto de dos pares de raices imajinarias es esencialmente positivo; i los valores reales de x' introducidos sucesivamente en (A) dan tambien valores reales para la otra coordenada, cuyo valor jeneral es . . $y' = \frac{b^2 \mathfrak{C} x'}{a^2 a - (a^2 - b^2) x'}$

Reconócese pues «que de cualquier punto del plano pueden tirarse cuando menos dos normales á la elipse.» Serán cuatro, en el caso de ser reales todas las raices de la ecuacion (C).

Para la solucion gráfica pudiera construirse la curva del 2.° grado, representada por la ecuacion (A), jeneralizando las coordenadas x', y': la cual se advierte ser una hipérbola, por cuanto solo contiene término de 2.° grado en $x'y'$: sus intersecciones con la elipse (B) serian dos puntos, ó cuatro, pertenecientes con el $(\alpha, \mathfrak{C})$ a las respectivas normales.

Analíticamente vá a demostrarse la igualdad de los ángulos que forma la normal con los dos radios vectores correspondientes, estableciendo las ecuaciones de las tres rectas: i sea para la normal mq (Fig. 74) i para los dos radios vectores Fm, $F'm$, designando por x', y' las coordenadas del punto m.

mq . . $y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x')$; Fm . . $y = \frac{y'}{x' - c}(x - c)$. Sea *àng.* $Aqm = \alpha$; *àng.* $AFm = \alpha'$

$Tanj.\ \alpha = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}$; $tanj.\ \alpha' = \frac{y'}{x' - c}$; $tanj.\ Fmq = tanj.\ (\alpha' - \alpha) = \frac{tanj\ \alpha' - tanj\ \alpha}{1 + tanj\ \alpha'\ tanj\ \alpha} = \frac{cy'}{b^2}$ . . (D)

Para el ángulo $F'mq$, se reemplazaria la ecuacion de Fm por la de $F'm$, que es . . .

$y = \frac{y'}{x' + c}(x + c)$, i se restaria del ángulo Aqm el $AF'm$: el resultado seria el mismo. Basta sin embargo cambiar c en $-c$ en (D): con esto la tanjente es la misma, pero negativa, correspondiente al ángulo $F'mq$ tomado negativamente. De uno ó de otro modo, los dos ángulos resultan iguales; é iguales tambien los que la tanjente md forma con Fm i mn, lo que tendria demostracion análoga directa.

Diàmetros conjugados—Estudiada la elipse con referencia á sus ejes, conviene hacerlo tambien con referencia á cualquiera de sus infinitos sistemas de diámetros conjugados oblicuos, i examinar qué relaciones existen entre estos i los ejes; partiendo de la ecuacion . . . $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Conservando el oríjen en el centro, se variará la direccion de los ejes coordenados, poniendo por x . . $x \cos \alpha + y \cos \mathfrak{C}$, i por y . . . $x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{sen} \mathfrak{C}$. Es $\alpha = àng.\ (x'x)$; $\mathfrak{C} = àng.\ (y'x)$.
Trasformada; $(a^2 sen^2 \mathfrak{C} + b^2 cos^2 \mathfrak{C})\, y'^2 + 2\,(a^2 sen\alpha\, sen\mathfrak{C} + b^2 cos\alpha\, cos\mathfrak{C})\, xy + (a^2 sen^2\alpha + b^2 cos^2\alpha)\, x^2 = a^2b^2$.

$a^2\, sen\, \alpha\, sen\, \mathfrak{C} + b^2\, cos\, \alpha\, cos\, \mathfrak{C} = 0$ . . (E); ecuacion de condicion (Leccion 13) para que los nuevos ejes sean diámetros conjugados; que siendo única entre α i $\mathfrak{C}$ espresa haber infinitos sistemas de tales diámetros, como ya se sabia. La trasformada queda entónces reducida á esta forma; . . $My^2 + Nx^2 = a^2b^2$, en que M i N son positivas.

Dividiendo (E) por $cos\, \alpha\, cos\, \mathfrak{C}$; . . $tanj\, \alpha\, tanj\, \mathfrak{C} = -\frac{b^2}{a^2}$ . . (F). Por ser el 2.° miembro esencialmente negativo, las tanjentes son de contrarios signos, i los ángulos α i $\mathfrak{C}$ uno agudo i otro obtuso. «Dos diámetros conjugados nunca se hallan pues en un mismo cuadrante, de los cuatro en que dividen á la elipse sus ejes.»

Si $a = b$, . . $tanj\, \alpha\, tanj\, \mathfrak{C} = -1$; la elipse se hizo círculo, i en este son perpendiculares entre sí cualesquiera diámetros conjugados: cosa evidente.

Sean AA', BB' (Fig. 78) los dos ejes $2a$, $2b$ de una elipse, i OC la direccion de un diámetro cualquiera: trátase de hallar por construccion jeométrica la direccion del diámetro conjugado, que se supondrá ser OD.

Levantando la perpendicular AC sobre AA', i designando por α i $\mathfrak{C}$ los ángulos AOC i AOD (suplemento de AOD'), se tiene segun la trigonometría;

$Tanj\, \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{a}$; $tanj.\ \mathfrak{C} = -\frac{AD}{OA} = -\frac{AD}{a}$; i por tanto (F) . . $\frac{AC \times AD}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$

Sale de aquí . . $AD = \frac{b^2}{AC} = \frac{OB \times OB}{AC}$; valor que construido por medio de una 3.ª proporcional determinará el punto D, para tirar por él el diámetro conjugado OD.

Dada la ecuacion . . $y = mx$ de un diàmetro de la elipse, se encontrará inmediatamente la ecuacion . . $y = m'x$ de su conjugado en virtud de la relacion (F). Será . . $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, de donde . . $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$.

Son pues las ecuaciones jenerales de dos diámetros conjugados; . . $y = mx$; . . $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$. . (3)

Designando ahora por x', y' las coordenadas del punto en que el 1.° encuentra à la curva, será $m = \frac{y'}{x'}$; i las ecuaciones (3) pueden escribirse así; . . $y = \frac{y'}{x'}x$; . . $y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}x$ . . . (3′)

I como la tanjente tirada por el mismo punto (x', y'), estremidad del primer diámetro, tiene por ecuacion . . . $a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2$, ó bien . . $y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}x + \frac{b^2}{y'}$; se advierte comparando con (3′) «que la tanjente en el estremo de un diámetro es paralela al diámetro conjugado.» Resultado importante, á que ha podido llegarse directamente considerando á la tanjente como una cuerda del sistema de las que bisecta el diámetro, cuyos dos estremos se han confundido en el punto de contacto.

Cuestion 1.ª—Hallar el centro de una elipse. (Fig. 79)—Tírense dos cuerdas paralelas, *ac, bd*: la recta *mn* que pase por sus puntos medios será un diàmetro, i el punto medio *O* de este el centro buscado. Si solo se diese un arco de elipse, se tiraria otro par de cuerdas paralelas para determinar otro diámetro, i la interseccion de los dos diámetros seria el centro.

Cuestion 2.ª—Dado un diámetro *mn*, trazar su diámetro conjugado—Tírese una cuerda *rs*, paralela á *mn*. La recta *m'n'*, que pasa por el centro *O* i por el punto medio de *rs*, es el diámetro conjugado del *mn*.

Cuestion 3.ª—Tirar por un punto *m* de la curva una tanjente—Tírese por el mismo punto el respectivo diámetro *mn*, i búsquese su conjugado *m'n'*: la recta *AmB*, paralela á *m'n'*, será tanjente á la elipse.

Sea un diàmetro cualquiera . . $r = mx$. Búscase la distancia del oríjen (el centro) á uno de los puntos en que corta à la elipse . . $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$; es decir, *la magnitud del semidiàmetro*.

Combinando las dos ecuaciones, se obtienen como valores de los cuadrados de las coordenadas del punto de interseccion; . . $x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2}$; $y^2 = \frac{a^2 b^2 m^2}{a^2 m^2 + b^2}$; i llamando a' al semidiámetro, ó distancia buscada, se tendrá . . . $a' = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{ab\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2 m^2 + b^2)}}$. . . . (4).

La ecuacion del diámetro conjugado, segun lo visto arriba (3), es . . $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$.

Para hallar la magnitud del semidiámetro, puede procederse de la misma manera; pero basta reemplazar m por $-\frac{b^2}{a^2 m}$ en (4). Haciendo lo uno ó lo otro, i llamando b' al semidiámetro, la simplificacion da; . . $b' = \frac{\sqrt{(a^4 m^2 + b^4)}}{\sqrt{(a^2 m^2 + b^2)}}$ . . . . (5).

Sea $\theta = (\varepsilon - \alpha)$ (Fig. 80.) el ángulo que forman entre sí los dos diámetros conjugados, *mn*, *m'n'*. Segun la fórmula (H) (Leccion 8.ª), es . . $sen\,\theta = \frac{m + \frac{b^2}{a^2 m}}{\sqrt{(1+m^2)}\sqrt{(1+\frac{b^4}{a^4 m^2})}} = \frac{a^2 m^2 + b^2)}{\sqrt{(1+m^2)}\sqrt{(a^4 m^2 + b^4)}}$ (6)

$(4)^2 + (5)^2 \} a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 b^2 m^2 + a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2} = \frac{a^2 (a^2 m^2 + b^2) + b^2 (a^2 m^2 + b^2)}{a^2 m^2 + b^2} = a^2 + b^2$ . . . (7)

O multiplicando por 4 ambos miembros de la ecuacion; . . $4a'^2 + 4b'^2 = 4a^2 + 4b^2$; lo mismo que . . $(2a')^2 + (2b')^2 = (2a)^2 + (2b)^2$. Significa «que la suma de los cuadrados de dos diámetros conjugados cualesquiera equivale à la de los cuadrados de los ejes.»

La multiplicacion ordenada de las tres ecuaciones (4), (5) i (6) produce:

$$a'b'\,sen\,\theta = \frac{ab\sqrt{(1+m^2)}\sqrt{(a^4m^2+b^4)(a^2m^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}\sqrt{(a^2m^2+b^2)}\sqrt{(1+m^2)}\sqrt{(a^4m^2+b^4)}}\,;\text{ ó bien }..a'b'\,sen\,\theta = ab\,..(8)$$

Siendo $a'b'\,sen\,\theta$ el área del paralelógramo formado sobre los dos semidiámetros conjugados, aparece de aquí ser ella equivalente á la del rectángulo ab de los semiejes.

Tambien, cuatriplicando; «que el paralelógramo $A'B'C'D'$ de dos diámetros conjugados es equivalente al rectángulo $ABCD$ de los ejes.» O lo que es lo mismo, «que todos los paralelógramos circunscritos á la elipse son equivalentes.»

Las tres ecuaciones; $..a'^2+b'^2=a^2+b^2$, $..a'b'\,sen\,\theta=ab$, $..\,tanj\,\alpha\,tanj\,\mathfrak{C}=-\frac{b^2}{a^2}$, de relacion entre a i b (los semiejes), a' i b' (dos semidiámetros conjugados) i α, $\mathfrak{C}$ (los ángulos que estos forman con el eje mayor de la elipse), servirán para determinar tres de las seis cantidades, dados los valores de las otras tres.

LECCION 25.

La Elipse.—(*Continuacion*).

De la Leccion precedente; $..y=mx$; $..y=-\frac{b^2}{a^2m}x$..(A). Diámetros conjugados.

Magnitudes de los semidiámetros; $..a'=\frac{ab\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}$; $..b'=\frac{\sqrt{(a^4m^2+b^4)}}{\sqrt{(a^2m^2+b^2)}}$..(B).

Ecuaciones de relacion; $..a'^2+b'^2=a^2+b^2$..(C); $a'b'\,sen.\,\theta=ab$..(D); $tanj.\,\alpha\,tanj.\,\beta=-\frac{b^2}{a^2}$..(E)

Continuando las investigaciones analíticas con referencia á los diámetros conjugados de la elipse, trátase ahora en primer lugar de descubrir si hai en ella *diàmetros conjugados iguales*.

Al efecto debe verse si existe algun valor real de m que haga $a'=b'$.

Igualando en consecuencia los segundos miembros de las ecuaciones (B), i elevando al cuadrado, se tiene; ... $a^2b^2(1+m^2)=a^4m^2+b^4$; ... $a^2m^2(a^2-b^2)=b^2(a^2-b^2)$; ... $m=\pm\frac{b}{a}$.

Supuesto que la igualacion hecha, equivalente á suponer $a'=b'$, no ha conducido á m imajinaria, hai diámetros conjugados iguales: i llevando uno cualquiera de los dos valores de m á las ecuaciones (A), se obtiene ... $y=\frac{b}{a}x$, .. $y=-\frac{b}{a}x$, por ecuaciones particulares de los dichos diámetros. Se ve por ellas «que los diámetros iguales de la elipse se hallan colocados simétricamente con respecto á los ejes; i que su direccion es la de las diagonales del rectángulo de los mismos ejes.»

Se determina su magnitud haciendo $m=\frac{b}{a}$ en cualquiera de las ecuaciones (B), ó haciendo $a'=b'$ en (C). El semidiámetro es ... $a'=\sqrt{(\frac{1}{2}(a^2+b^2))}$ ... (F).

Para el ángulo ϕ de dos diámetros conjugados cualesquiera, da la ecuacion (D); ... *sen.* $\phi=\frac{ab}{a'b'}$..(G); que conviene á los dos ángulos, suplementarios uno de otro. Si se considera que θ representa el ángulo obtuso, á su máximo valor corresponde el mínimo de *sen.* θ, i á este mínimo corresponde en (G) el máximo de $a'b'$, ó de $a'^2b'^2$, por ser el numerador ab constante: i por cuanto, segun (C), $a'^2+b'^2=a^2+b^2$, cantidad constante, el máximo valor del producto $a'^2b'^2$ es cuando sus factores son iguales, esto es, siendo $a'^2=b'^2$, ó $a'=b'$. Aparece pues «que los diámetros conjugados iguales son los que forman entre sí el máximo ángulo.»

En este caso, de $a' = b'$, es ... $sen.\ \theta = \frac{ab}{a'^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ ... (H); (introduciendo el valor (F).)

Lo mismo se obtiene considerando que θ representa el ángulo agudo.

Merece inquirirse qué diámetros conjugados dan la máxima i la mínima suma.

Para ello, se sumará la ecuacion (C) con la (D) multiplicada por ... $\frac{2}{sen.\ \theta}$

El resultado es; .. $a'^2 + b'^2 + 2a'b' = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{sen.\ \theta}$; de donde .. $a' + b' = \sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{2ab}{sen.\ \theta}\right)}$ .. (I)

Para una elipse dada, el máximo valor de $a' + b'$ corresponde en (I) al mínimo de $sen.\ \theta$, pues que a i b son constantes: este es el caso anterior de los diámetros iguales, i por tanto la máxima suma es $2a'$.

El mínimo valor de $a' + b'$ corresponde al máximo de $sen.\ \theta$, que es el radio, es decir la unidad: entonces ... $a' + b' = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)} = a + b$; mínima suma.

«De todos los sistemas de diámetros conjugados de la elipse, los iguales son los que dan la máxima suma, i los ejes los que dan la mínima.»

Búscanse en fin las ecuaciones de dos diámetros conjugados que formen entre sí un àngulo dado θ; i sea $tanj.\ \theta = k$.

Sus ecuaciones jenerales son (A) .. $y = mx$, $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$; en que debe determinarse m por la condicion de la cuestion. Se aplicará la fórmula (F) de la Leccion 8.ª

$$k = \frac{m + \frac{b^2}{a^2 m}}{1 - \frac{b^2 m}{a^2 m}} = \frac{a^2 m^2 + b^2}{m(a^2 - b^2)} = \frac{a^2 m^2 + b^2}{c^2 m}; \ldots m = \frac{kc^2 \pm \sqrt{(k^2 c^4 - 4a^2 b^2)}}{2a^2} \ldots (J)$$

Tiene m dos valores, que llevados á las ecuaciones (A) darán dos pares de diámetros conjugados que satisfacen á la cuestion propuesta; mas para que ella sea posible es necesario que sea $k^2 c^4 > 4a^2 b^2$, ó á lo mas $k^2 c^4 = 4a^2 b^2$, de donde .. $k = tanj.\ \theta = \frac{2ab}{c^2}$ ... (L).

No puede por lo mismo darse un ángulo, agudo ú obtuso, cuya tanjente sea menor que $\frac{2ab}{c^2}$, que es la mínima: para ésta en (J) el radical se anula, i queda $m = \frac{kc^2}{2a^2}$; ó bien ... $m = k \times \frac{c^2}{2a^2} = \frac{2ab}{c^2} \times \frac{c^2}{2a^2} = \frac{b}{a}$; dando $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ por ecuaciones de los diàmetros, que son las mismas halladas para los diámetros iguales.

Nótese que si del valor (H) de $sen.\ \theta$ para el caso de diámetros iguales se saca el de la tanjente, se obtiene; .. $tanj.\ \theta = \frac{sen.\ \theta}{cos.\ \theta} = \frac{sen.\ \theta}{\sqrt{(1 - sen.^2\ \theta)}} = \frac{2ab}{c^2}$, el mismo valor (L).

Entre las diversas cuestiones referentes á los diámetros conjugados, que son resolubles por medio de las tres fòrmulas (C), (D), (E), propongámonos la siguiente: «Dados de magnitud i posicion dos diámetros conjugados $2a'$, $2b'$, (i por consiguiente el centro), hallar la magnitud i posicion de los ejes de la elipse.»

1.º ... (C) $\pm$ (D) $\times 2$ $\rangle$ .. $a^2 \pm 2ab + b^2 = a'^2 + b'^2 \pm 2a'b'\ sen.\ \theta$; .. $a \pm b = \sqrt{(a'^2 + b'^2 \pm 2a'b'\ sen.\ \theta)}$

Separando aquí los valores de $a + b$ i de $a - b$, suma i diferencia de los semiejes, los valores de estos se encontrarán inmediatamente i podrán construirse.

2.º — Si por los estremos de cada diámetro se tiran paralelas al otro, estas paralelas serán cuatro tanjentes: i si del centro, con radio $= a$, se traza una circunferencia de círculo, i en sus intersecciones con las tanjentes se levantan perpendiculares, las intersecciones de estas serán los focos, segun la nota del problema 2,º Leccion 23. Determinada así la posicion del eje mayor, se determinará en seguida por una perpendicular en el centro la del eje menor.

Cuerdas suplementarias — Llámanse así (Fig. 81), dos cuerdas cd, cd', que concurriendo en un punto c de la elipse se apoyan en los estremos de un diámetro dd'.

Si por el centro O se tira otro diámetro ab, paralelo á una de las cuerdas cd, su conjugado gh dividirá por mitad á cd; i como tambien divide por mitad á dd', que es otro lado del triángulo dcd', es paralelo á cd'.

Se deduce pues; 1.° que dos cuerdas suplementarias de la elipse son respectivamente paralelas á un par de diámetros conjugados; i 2.° que como la inclinacion mútua de los diámetros conjugados tiene ciertos límites, los mismos límites tiene la mútua inclinacion de las cuerdas suplementarias.

Lo 1.° se demuestra con facilidad analíticamente.

Sean (x'', y''), i $(-x'', -y'')$, los puntos d, d', estremos de un diámetro; i sea (x', y') un punto cualquiera c de la curva. Las cuerdas suplementarias cd, cd', que cada una pasa por dos de estos tres puntos, tendrán por ecuaciones; .. $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$; ... $y - y' = \frac{y' + y''}{x' + x''}(x - x')$; i designando por α', β', los ángulos que ellas forman con el eje mayor de la elipse, eje de las abscisas, será;

$$tanj.\ \alpha' = \frac{y' - y''}{x' - x''};\ tanj.\ \beta' = \frac{y' + y''}{x' + x''};\ tanj.\ \alpha'\ tanj.\ \beta' = \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2} \ldots (M).$$

Al mismo tiempo se verifica ... $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$; .. $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2$; por ser puntos de la curva los (x', y'), $(\pm x'', \pm y'')$; i la resta de estas dos ecuaciones produce; ....

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0;\ \text{de donde} .. \frac{y'^2 - y''^2}{x'^2 - x''^2} = -\frac{b^2}{a^2};\ \text{ó bien (M)} .. tanj.\ \alpha'\ tanj.\ \beta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Entre los ángulos α, β, que dos diámetros conjugados cualesquiera forman con el mismo eje mayor $2a$, existe igualmente la relacion (E) ... $tanj.\ \alpha\ tanj.\ \beta = -\frac{b^2}{a^2}$

Por tanto; ... $tanj.\ \alpha'\ tanj.\ \beta' = tanj.\ \alpha\ tanj.\ \beta$; i es claro que si $tanj.\ \alpha = tanj.\ \alpha'$ por ser una cuerda de la elipse paralela à un diámetro, forzosamente será tambien $tanj.\ \beta = tanj.\ \beta'$, es decir, la cuerda suplementaria paralela al diámetro conjugado.

Consecuencia 1.ª – Si por un punto h de una elipse (Fig. 81) se quiere tirar una tanjente, puede procederse tirando el diámetro hg, i luego dos cuerdas suplementarias cualesquiera, cd, cd', una de las cuales cd' sea paralela á hg: la tanjente en h será una paralela á cd, supuesto que esta lo es al diámetro conjugado del hg.

Consecuencia 2.ª – Para tirar en una elipse (Fig. 82) un par de diàmetros conjugados que formen entre sí un ángulo posible dado, se procederà del modo siguiente. Sobre un diàmetro cualquiera dd' como cuerda trácese un arco de círculo capaz de medir al àngulo dado, que sea edd'; por uno de los puntos m de interseccion del arco con la elipse, tírense las cuerdas suplementarias md, md', que formaràn entre sí por la construccion el $àng.\ dmd' = edd'$; i tírense en fin los diámetros ab, gh, paralelos á estas cuerdas. Habrá dos puntos m de interseccion, i se obtendrán por lo mismo los dos pares de diàmetros que satisfacen á la condicion propuesta.

El requisito para ser *posible* el ángulo dado es desde luego no ser mayor que el obtuso ni menor que el agudo que forman los diámetros iguales.

Si fuese recto el àngulo à que se aplicase la construccion, daria esta por resultado los ejes de la elipse.

LECCION 26.

La Elipse. — (*Conclusion*).

Segun lo visto en la Leccion 24, la ecuacion jeneral de la elipse, referida á sus diámetros conjugados como ejes coordenados, es ... $My^2 + Nx^2 = a^2 b^2$ ... (1).

Los coeficientes son; ... $M = a^2\ sen^2 \beta + b^2\ cos^2 \beta$; ... $N = a^2\ sen^2 \alpha + b^2\ cos^2 \alpha$.

Haciendo en (1) alternativamente $y = 0$, $x = 0$, los valores que se obtengan para x i para y en estas dos suposiciones espresarán las magnitudes de los semi-diámetros, en funcion de los ejes i del ángulo que cada uno de aquellos forma con el eje mayor.

Llamando a', b' á los semidiámetros, sale; ... $x^2 = a'^2 = \frac{a^2 b^2}{N}$; ... $y^2 = b'^2 = \frac{a^2 b^2}{M}$

$M = \frac{a^2 b^2}{b'^2}$; $N = \frac{a^2 b^2}{a'^2}$ } Sustituyendo en (1); ... $\frac{y^2}{b'^2} + \frac{x^2}{a'^2} = 1$; ó bien .. $a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$ ... (2).

«La forma de la ecuacion de la curva es una misma, segun aparece en (2), sea que ella esté referida á los ejes, ó que esté referida á los diámetros conjugados oblicuos:» ó mas bien la primera, que ha sido la considerada en todas las Lecciones precedentes, no es sino caso particular de la ecuacion (2); á saber, cuando $\alpha = 0$, $\mathcal{C} = \frac{1}{2}\pi$.

Por tanto «todas las propiedades de la elipse demostradas hasta ahora, i cualesquiera otras, que solo dependen de la magnitud de los ejes, convienen à cualesquiera otros diámetros conjugados.»

Combinando (1) con ... $tanj.\alpha\ tanj.\mathcal{C} = -\frac{b^2}{a^2}$ para eliminar $\mathcal{C}$, i designando por m la tanjente de α, se hallarian de nuevo los valores (B) (Leccion 25) de a', b', en funcion de a, b, i del ángulo α, i tambien las relaciones (C) i (D) de la misma Leccion.

Si $a' = b'$, la (2) se reduce á ... $y^2 + x^2 = a'^2$ ... (3); ecuacion mui sencilla de la elipse referida à sus diámetros iguales, que es la misma deducida en la Leccion 11, ejemplo 2.°

Suponiendo (Fig. 83) que el eje OY á que esa ecuacion se refiere, i que es oblicuo sobre el OX, tomase la posicion perpendicular OY', entónces representaria (3) un círculo de radio $Oa = a'$ i con el centro en O; i para una misma abscisa Op serian iguales las ordenadas mp del círculo i np de la elipse. Si se diese pues el diàmetro aa', uno de los iguales de una elipse, i el ángulo aOb de los mismos diámetros, podria construirse la elipse trazando sobre aa' un círculo, i dando luego á varias de sus ordenadas rectangulares mp, $m'p'$ &c, la inclinacion np, $n'p'$ &c del ángulo aOb de los diámetros. Se advertirá desde luego que la direccion de los ejes de la curva es la de las rectas OA, OB, bisectrices de los àngulos de los diámetros.

Para construir la elipse directamente por su ecuacion (2), se la trazaria como si los diámetros conjugados $2a'$, $2b'$, fuesen los ejes, i luego se daria á las ordenadas la inclinacion del ángulo de los diámetros.

De (2) se obtiene; ... $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2)$; ó bien ... $\frac{y^2}{(a'+x)(a'-x)} = \frac{b'^2}{a'^2}$; i si aa', bb' (Fig. 84) son los diámetros conjugados $2a'$, $2b'$, i $mp = y$, será $a'p = a' + x$; $ap = a' - x$. Resulta de aquí que, como sean cuales fueren x, y, para cualquier punto de la curva, el 2.° miembro $\frac{b'^2}{a'^2}$ de la ecuacion de arriba no varía, «los cuadrados de las ordenadas ó semicuerdas paralelas son siempre proporcionales con los productos de los segmentos del respectivo diámetro.» Siendo característica de la elipse esta propiedad, convenia repetir su demostracion jeneralizándola.

La ecuacion de la tanjente en $m(x', y')$, es ... $a'^2 yy' + b'^2 xx' = a'^2 b'^2$ ... (4).

$y = 0$ } .. $x = Oq = \frac{a'^2}{x'}$; valor independiente de y', i por tanto el mismo para la tanjente en m', que tiene igual abscisa. «Dos tanjentes á la elipse se cortan pues en la prolongacion del diámetro que bisecta la cuerda de contacto;» la cual es paralela al diámetro conjugado.

Se tiene $Oq = \frac{\overline{Oa}^2}{Op}$, ó bien .. $Oq \times Op = \overline{Oa}^2$. «El semidiámetro Oa es medio proporcional entre las abscisas del pie de la tanjente i del punto de contacto.»

Asímismo, $x = 0$ en (4) da .. $yy' = b'^2$; es decir, .. $Oq' \times Op' = \overline{Ob}^2$.

Puede segun esto tirarse tanjentes á la elipse, de un punto esterior q, tirando el correspondiente diámetro qO i su conjugado bb'; hallando luego Op por la proporcion ... $Oq : Oa :: Oa : Op$; i tirando en fin por p una paralela á bb', la cual dará los puntos m i m' de contacto de las dos tanjentes.

Designando por $(\alpha, \mathcal{C})$ el punto q, i por (x', y') el punto desconocido de contacto, para determinar este se tienen las dos ecuaciones ... $a'^2 \mathcal{C} y' + b'^2 \alpha x' = a'^2 b'^2$ ... (4'); ... $a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2$ ... (2'); en que, jeneralizadas x', y', representará (4') la cuerda de contacto i (2') la elipse dada.

En (4'); .. $y' = 0$ } .. $x' = \frac{a'^2}{\alpha}$; abscisa Op (Fig. 84) de la interseccion de la cuerda de contacto mm'

El área del círculo circunscrito, conforme á la jeometría, es πa^2, siendo π la lonjitud rectificada de la circunferencia del círculo cuyo diámetro es la unidad; por consiguiente... $\pi a^2 : E :: a : b$;.. $E = \pi ab$.. (6'). Representa E la elipse.

Es decir, «que la elipse equivale á un círculo cuyo radio sea medio proporcional entre los semiejes.» Las elipses no son pues *cuadrables*: su área se computa por aproximacion, como la del círculo, que pertenece á la misma familia.

Poniendo en (6) por ab su equivalente ... $a' b' \, sen. \, \theta$ ((D) Leccion 25), será ... $E = \pi a' b' \, sen. \, \theta$ .. (6').

Representa el área de la elipse en funcion de dos semi-diámetros conjugados, i del ángulo que forman entre sí.

LECCION 27.

La Hipérbola.

SECCION 15.—La Hipérbola.

Su ecuacion referida al centro i á los ejes es ((12) Leccion 21) ... $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$.. (1).

Es la ecuacion misma de la elipse, cambiando b^2 en $-b^2$, ó b en $b\sqrt{-1}$; i por tanto, con esta modificacion pueden deducirse muchas propiedades de la hipérbola de las de la elipse. Entre las dos curvas existen grandes analojías, como se verá, i la discusion de sus ecuaciones se diferencia en mui poco.

La forma de la ecuacion (1) dice por sí sola que la hipérbola es simétrica con respecto á ambos ejes coordenados, puesto que son rectangulares.

Resuelta (1) en ambas variables, da; ... $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$.. (A); $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 + y^2)}$.. (B).

Tiene y dos valores iguales reales cuando $x > \pm a$, indefinidamente; nulos si $x = \pm a$; imajinarios si $x < \pm a$.

Tiene x dos valores iguales reales para todo valor de y, positivo ó negativo.

Tomando pues (Fig. 88) dos abscisas $Oa = Oa' = \pm a$, los puntos a, a' serán las intersecciones de la curva con el eje de las x; i levantando las perpendiculares ac, $a'c'$, la hipérbola se hallará fuera de estas dos ordenadas paralelas, que separan sus dos ramas.

Sea $x = Op > a$. Para determinar y gráficamente, del centro O con radio Op trácese un arco, que dará en el punto e ... $ae = \sqrt{(\overline{Oe}^2 - \overline{Oa}^2)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; i en (A) ... $y = \frac{b}{a} \times ae$;.. $a : b :: ae : y$. Construida esta 4.ª proporcional, i llevada de p ácia arriba i ácia abajo en el sentido de las ordenadas, se obtendrán dos puntos, m, m', en la rama positiva, i otros dos, m'', m''', en la rama negativa, á virtud de la simetría, tomando $Oq = Op$.

En (1) .. $x = 0 \rangle y = \pm b\sqrt{-1}$. La curva no corta al eje de las y, como ya se sabia. Si en OY se toman las magnitudes Ob, Ob' iguales al factor real b, serán por analojía con la elipse aa', bb' los ejes ó diàmetros principales de la hipérbola; llamándose eje *trasverso* al aa' que la corta, i *no trasverso* ó imajinario al bb' que no la corta. *Vértices*, a, a'.

Para un punto d, interior á la curva, en que la ordenada $pd < pm$, es notoriamente ....., $a^2 y^2 - b^2 x^2 < -a^2 b^2$, ó bien ... $a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 < 0$; i para un punto esterior d', en que $pd' > pm$, es ... $a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 > 0$. El resultado negativo, positivo ó nulo, de la sustitucion de las coordenadas de un punto en la ecuacion (1) reducida al primer miembro, indicará si el punto está dentro, fuera, ó en la curva.

De (1); ... $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x + a)(x - a) \rangle$ Siendo $x = Op$, es $y = pm$, $x + a = a'p$, $x - a = ap$. Es pues ... $\overline{pm}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times ap \times a'p$; i para otro punto n será .. $\overline{p'n}^2 = \frac{b^2}{a^2} \times ap' \times a'p'$.

Formando proporcion; ... $\overline{pm}^2 : \overline{p'n}^2 :: ap \times a'p : ap' \times a'p'$. Es decir; «que en la hipérbola, como en la elipse, los cuadrados de las perpendiculares bajadas sobre el eje son proporcionales con los productos de sus distancias á los vértices.» Pero aquí los vértices se hallan de un mismo lado de la perpendicular, i su distancia no es la suma sino la diferencia de los segmentos.

Un círculo descrito del centro O, con radio $> Oa = a$, cortaria á la hipérbola en cuatro puntos simétricamente colocados con respecto á los ejes. La posicion de estos se hallaria por medio de tal círculo, dado el centro; i para tener la magnitud del semieje imajinario Ob, se tomará una abscisa $x = a\sqrt{2}$, que da $x^2 = 2a^2$, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a^2 - a^2) = b^2$, $y = \pm b$. Es Ob igual á la ordenada de esa abscisa.

Sean x, y, las coordenadas de un punto m, para hallar el valor del radio $Om = \delta$.

Se tiene; ... $\delta = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2))} = \frac{1}{a}\sqrt{((a^2 + b^2)x^2 - a^2 b^2)}$.

Corresponde el mínimo radio á la mínima abscisa, $x = \pm a$, i lo es en consecuencia el semieje trasverso; lo cual estaba indicado por la forma de la curva.

Para trasladar el orìjen al vértice positivo a será $x' = x - a$, $x = x' + a$. Poniendo en (1) $x + a$ por x, la trasformada es ... $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ ... (2); que es la ecuacion referida al vértice. Si se introduce el *parámetro* $2p = \frac{2b^2}{a}$, de donde ... $b^2 = ap$, la nueva ecuacion referida al vértice, al eje i al parámetro es ... $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ .. (3).

Es (3) de la forma jeneral de la ecuacion del fin de la Leccion 21, siendo q positiva.

Focos de la hipérbola—Llámanse *focos* de la hipérbola dos puntos tales, F, F', (Fig. 89), que la diferencia de sus distancias $F'm$, Fm á cualquier punto m de la curva es siempre una misma, é igual con el eje trasverso $aa' = 2a$. Se determinará su posicion por el método inverso empleado para la elipse; «buscando el lugar jeométrico de los puntos del plano cuyas distancias à dos puntos fijos F, F', dan por diferencia una magnitud constante $2a$.»

Sea $FF' = 2c$, i tómese esta recta por eje de las abscisas: sea eje de las ordenadas la perpendicular OY levantada en la mitad de FF'. Si se supone ser m un punto (x, y) de la curva ó lugar jeométrico, se tiene; ... $F'm - Fm = 2a$ ... (C); $\overline{F'm}^2 = y^2 + (c + x)^2$ ... (D); $\overline{Fm}^2 = y^2 + (x - c)^2$ (E); $\overline{F'm}^2 - \overline{Fm}^2 = 4cx$ ... (F).

Dividida (F) por (C) da; ... $F'm + Fm = \frac{2cx}{a}$ ... (G); i por tanto, de (C) i (G) ... $F'm = \frac{cx}{a} + a$; $Fm = \frac{cx}{a} - a$ ... (4).

Llevando ahora á una de las ecuaciones (D), (E), respectivamente, el valor de $F'm$ ó Fm, i reduciendo, queda; ... $a^2 y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2)$ ... (H).

En el triángulo FmF' es $FF' > F'm - Fm$; de modo que $2c > 2a$, $c > a$, i $c^2 - a^2 > 0$.

Sea $c^2 - a^2 = b^2$. Sustituyendo en (H) ... $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$; ecuacion de una hipérbola referida al centro i á sus ejes $2a$ i $2b$, i en que es conocida la posicion de los focos.

«Los focos se hallan en el eje trasverso, á la distancia $c = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$ del centro.» Debia resultar así, pues que en la elipse es la *escentricidad* $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Para construirlos, desde el centro O i con radio $OF = ab = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ trácese una circunferencia de círculo, que cortará á las prolongaciones del eje trasverso en los dos puntos buscados, F, F'.

Llámase aquí tambien *radios vectores* á $F'm$ i Fm: i aquí tambien, como en la elipse, i segun se ve en (4), «los radios vectores son funciones racionales de la abscisa, referida la hipérbola al centro i á sus ejes.»

Las distancias aF, $a'F$, del foco F á los dos vértices, son $c - a$, $c + a$, cuyo producto es ... $c^2 - a^2 = a^2 + b^2 - a^2 = b^2$. «En la hipérbola pues, como en la elipse, el semieje b es medio proporcional entre estas distancias.»

Haciendo $x = \pm c = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$ en la ecuacion (1), se obtendria $y = \pm\frac{b^2}{a}$ por ordenada focal: el valor del semi-parámetro.

Para un punto d, situado fuera de la curva, tirando las rectas dF, dF', mF', se tiene; $mF' - mF = 2a$; $(mF' + md) - (mF + md) = 2a$; i por cuanto $mF' + md > dF'$, i $mF + md = dF$, será.... $dF' - dF < 2a$. Semejantemente, para un punto d', situado dentro de la concavidad de la curva, resulta.... $d'F' - d'F > 2a$.

Dados los ejes i situados los focos F, F', se hallaria un punto m de la hipérbola por la interseccion de dos arcos trazados desde F i F' con radios Fm (arbitrario) i $F'm = Fm + 2a$. Para trazar por continuidad la rama derecha ó positiva, se haria jirar en F' una regla $F'd'$, fijando en su estremo d' i en F los estremos de un hilo $Fmd' = F'd' - 2a$, i conservando tirantes sus dos porciones Fm, md', con un lápiz que recorriese el borde de la regla al moverse esta. La rama negativa se trazaria de igual manera, fijando el estremo de la regla en F.

Directrices de la hipérbola — Tiene dos, una para cada foco, perpendiculares al eje trasverso. Las distancias de un punto al foco i á la directriz están en la relacion constante $k = \frac{c}{a} > 1$, lo cual se halla procediendo como para la elipse (Leccion 22). Siendo mac (Fig. 90) una rama de la hipérbola, i Oa el semieje trasverso, la directriz se situará, ó bien por su abscisa $OD = \frac{a^2}{c}$, ó bien tomando $OD = Op - a$, siendo Op la abscisa del punto m cuyo radio vector $Fm = c$. Despues se verá que el pie de la directriz coincide con el de la tanjente focal, lo mismo que en la elipse i en la parábola.

Escribiendo, como en la Leccion 23, los valores analíticos de las distancias de un punto variable á otro fijo i á una recta, é igualando aquella á esta multiplicada por $k = \frac{m}{n} > 1$, saldria la ecuacion de la hipérbola.

Uso de los focos para tirar tanjentes à la hipérbola — (Fig. 91).

1.° — Por un punto m de la curva. Tírense los radios vectores Fm, $F'm$: la mn, bisectriz del ángulo FmF', será la tanjente; lo que se prueba demostrando que todos sus puntos, esceptuado m, se hallan fuera de la hipérbola.

En efecto, tómese $me = mF$, i tírese Fe que resulta perpendicular á mn.

$F'e = 2a$; $Fc = ce$; i para un punto cualquiera s de mn, ... $sF = se$.

$F's - se < F'e$; ó bien ... $F's - Fs < F'e = 2a$. El punto s está fuera de la curva.

2.° — Por un punto esterior s. Desde s i F' como centros, i con sF i $aa' = 2a$ como radios, trácense dos arcos de círculo que se cortarán en dos puntos, siendo e uno de ellos. Tírese Fe: la perpendicular en su punto medio c pasará por s i será una de las tanjentes posibles: con igual construccion para el otro punto de interseccion se determinará la otra tanjente, que lo será á la otra rama de la curva.

Es tanjente la perpendicular en c, i pasa por s, por ser ella lugar jeométrico de todos los puntos del plano que como m i s equidistan de F i e. Se probaria ademas, como antes, que todos sus puntos están fuera de la curva, esceptuado m.

Nótese que la recta Oc, que va del centro al pie de la perpendicular Fc, es la mitad de $F'e = 2a$, por cuanto bisecta á los dos lados FF', Fe, del triángulo $FF'e$; quiere decir que es $Oc = a$. Se deduce de aquí este teorema importante, demostrado antes para la elipse: « que la circunferencia de círculo, trazada sobre el eje trasverso como diámetro, es lugar jeométrico del pie de toda perpendicular tirada de los focos sobre las tanjentes; » i á virtud de él pudieran tirarse las tanjentes, desde s, trazando sobre sF como diámetro un arco de círculo cuyas intersecciones con el otro determinarian la direccion de las tanjentes.

Dividiendo mn por mitad al ángulo FmF', se tiene ... $F'm : Fm :: F'n : Fn$; i como es $F'm > Fm$, es tambien $F'n > Fn$. « La tanjente corta pues siempre al eje trasverso entre el vértice de la rama de contacto i el centro.» Creciendo la abscisa del punto de contacto, i alejándose este por consiguiente, n se acerca á O; i cuando $x = \infty$, estando el punto de contacto en el infinito, n i O se confunden.

Dos perpendiculares Fc, $F'c'$, tiradas desde los dos focos sobre una tanjente mc', cierran dos triángulos rectángulos Fmc, $F'mc'$, que son semejantes por la igualdad de los ángulos en m, i de ellos sale; ... $mc : mc' :: Fc : F'c' :: mF : mF'$; « que las distancias del punto de contacto á los pies de las perpendiculares, i las perpendiculares mismas, son proporcionales con los radios vectores respectivos.» Lo mismo que en la elipse.

Para tirar una normal mq por un punto *m*, podria tirarse primero la tanjente i luego levantarse *mq* perpendicular sobre ella; ó dividirse por mitad el ángulo *Fmd* formado por el radio vector *Fm* i por la prolongacion del otro *F'm*.

LECCION 28.

La Hipérbola.—(*Continuacion.*)

Tanjentes i normales—La ecuacion de una tanjente á la hipérbola es deducible de cualquiera de las construcciones gráficas indicadas en la precedente Leccion, traduciéndolas en procedimientos analíticos.

Partiendo directamente de la ecuacion de la hipérbola .... $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ ....(1), la ecuacion jeneral de la tanjente en un punto (x',y'), deducida por el método ordinario, es ..... $a^2y'(y-y')-b^2x'(x-x')=0$ ...(2); ó bien ... $a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2$ ..(3), por cuanto .... $-a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$.

Directamente se probará tambien aquí ser (3) una tanjente; sumando la identidad ..... $a^2y^2-b^2x^2=a^2y^2-b^2x^2$ con la ecuacion $a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2$, i restando el duplo de (3).

Se obtiene ... $a^2(y-y')^2-b^2(x-x')^2=a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2$ ..(A); que es todavía la ecuacion de primer grado de la recta (3), siendo x, y sus coordenadas jenerales.

De (2) sale cuadrando; ... $a^4y'^2(y-y')^2=b^4x'^2(x-x')^2$; .. $\frac{a^2(y-y')^2}{b^2(x-x')^2}=\frac{b^2x'^2}{a^2y'^2}$ .. (B).

Supuesto que por la (1), cuyo 2.° miembro es el residuo de la resta de los dos términos del 1.° se reconoce que $b^2x'^2>a^2y'^2$, tambien se advierte en (B) ser $a^2(y-y')^2>b^2(x-x')^2$; i que por consiguiente son positivos los dos miembros de la ecuacion (A), ó $a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2>0$, para todos los valores correlativos de x,y, esceptuado el caso de $x=x'$, $y=y'$ en que el 2.° miembro es *cero* por serlo el 1.° Esto acredita (Leccion 27) hallarse fuera de la curva todos los puntos de la recta (A), que es la misma (3), menos uno, el (x',y'), el cual pertenece igualmente á la curva i es el de contacto.

Con el procedimiento empleado para la elipse en la Leccion 14, ó simplemente cambiando b^2 en $-b^2$ en los resultados, se obtendrian las ecuaciones de las tanjentes tiradas á la hipérbola por un punto (α,ξ); que haciendo $M=\sqrt{(a^2\xi^2-b^2\alpha^2+a^2b^2)}$, serian; $(a^2\xi\pm\alpha M)y-(b^2\alpha\pm\xi M)x=a^2\xi^2-b^2\alpha^2$; ó bien ... $a^2\xi(y-\xi)-b^2\alpha(x-\alpha)=\pm M(\alpha y-\xi x)$ .. (4).

Habrá dos tanjentes, una sola, ó ninguna, segun fuere $a^2\xi^2-b^2\alpha^2+a^2b^2$ positivo, nulo ó negativo; es decir, segun que el punto (α,ξ) esté fuera de la curva, en ella, ó dentro de ella, lo cual es evidente.

Como en la Leccion 23, pueden buscarse para la hipérbola las ecuaciones de las tanjentes paralelas à una recta dada, i las de las tanjentes que formen entre sí cierto ángulo dado: i para el caso de ser recto este ángulo, se hallará que el lugar jeométrico de los vèrtices es el círculo .. $x^2+y^2=a^2-b^2$, cuyo radio se determina de igual manera que la escentricidad en la elipse.

Las ecuaciones de las dos asìntotas de la hipérbola se hallaron por el método jeneral en la Leccion 17, ejemplo 3.°: ahora se las deducirá nuevamente, considerando á las asíntotas como tanjentes en un punto (x',y'), situado en el infinito.

De (1), puestas x',y' por x,y, sale .. $y'=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x'^2-a^2)}$; i sustituido en (3) el valor positivo;

... $ay\sqrt{(x'^2-a^2)}-bxx'=-a^2b$.

O bien, dividiendo por x'; ... $ay\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x'^2}\right)}-bx+\frac{a^2b}{x'}=0$ .. (C).

En (C) .. $x'=\infty$ $\left\{\begin{array}{l}..\frac{a^2}{x'^2}=0\\..\frac{a^2b}{x'}=0\end{array}\right.$; .. $ay-bx=0$ .. $y=\frac{b}{a}x$. Ecuacion de una asíntota, en que se ha convertido la tanjente siendo x',y' positivas.

gados los nuevos ejes, prueba haber infinitos sistemas de tales diàmetros: i siendo positivo el producto $\frac{b^2}{a^2}$ de las tanjentes, se advierte que los dos ángulos α i ϵ son ambos obtusos ó agudos, i que por tanto «dos diámetros conjugados están siempre en un mismo cuadrante de los formados por los ejes.»

$$\left.\begin{array}{l} a^2 sen^2 \epsilon - b^2 cos^2 \epsilon = M \\ a^2 sen^2 \alpha - b^2 cos^2 \alpha = N \end{array}\right\} My^2 + Nx^2 = -a^2 b^2 \ldots (9).$$ Ecuacion referida á los diámetros conjugados.

M i N deben ser de contrarios signos, (Leccion 21), para que (9) represente hipérbola. Va á demostrarse que en efecto lo son.

De (8) resulta que si $tanj.\ \alpha < \frac{b}{a}$, será $tanj.\ \epsilon > \frac{b}{a}$, pues que su producto es $\frac{b^2}{a^2}$.

De $tanj.\ \alpha < \frac{b}{a}$ sale $\ldots \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} < \frac{b}{a}; \ldots \frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} < \frac{b^2}{a^2}; \ldots a^2 sen^2\ \alpha - b^2 cos^2\ \alpha < 0$; N negativa.

De $tanj.\ \epsilon > \frac{b}{a}$ sale $\ldots \frac{sen\ \epsilon}{cos\ \epsilon} > \frac{b}{a}; \ldots \frac{sen^2\ \epsilon}{cos^2\ \epsilon} > \frac{b^2}{a^2}; \ldots a^2 sen^2\ \epsilon - b^2 cos^2\ \epsilon > 0$; M positiva.

Siendo $\ldots y = mx, y = m'x$, dos diámetros conjugados, será (8) $\ldots mm' = \frac{b^2}{a^2}; m' = \frac{b^2}{a^2 m}$.

De modo que, las ecuaciones jenerales de dichos diámetros son; $\ldots y = mx; \ldots y = \frac{b^2}{a^2 m} x \ldots (10)$.

Sean (Fig. 93) $aa' = 2a$, $bb' = 2b$ los ejes de una hipérbola, i Od la direccion dada de un diámetro: se quiere determinar gráficamente la direccion del conjugado, que se supondrá ser Oe. Levantando la perpendicular ad, i llamando α, ϵ, á los ángulos aOd, aOe, se tiene; $tanj.\ \alpha = \frac{ad}{Oa} = \frac{ad}{a}; \ldots .$

$$tanj.\ \epsilon = \frac{ae}{Oa} = \frac{ae}{a};\ tanj.\ \alpha\ tanj.\ \epsilon = \frac{ad \times ae}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Por consiguiente; $\ldots ad \times ae = b^2 = \overline{Ob}^2; \ldots ad : Ob :: Ob : ae$, que se construirá.

Para hallar el centro de una hipérbola, se tirarán rectas que dividan por mitad dos sistemas de cuerdas paralelas. Para determinar el diámetro conjugado de otro, dada la curva, se le tirará una cuerda paralela: por el punto medio de esta i por el centro pasarà el conjugado; i si se trazase la hipérbola conjugada, esta serviria para determinar las magnitudes de los diámetros no trasversos de la principal, que vendrian á ser trasversos de aquella.

Repitiendo con las ecuaciones $y = mx, y = \frac{b^2}{a^2 m} x$ de dos diámetros conjugados, i con la $\ldots .$ $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ de la hipérbola, las operaciones ejecutadas para la elipse en la Leccion 24, para hallar las distancias del centro á los puntos de interseccion de dichos diàmetros con la curva, ó lo que es lo mismo, las magnitudes de los semidiámetros, se obtienen los valores $\ldots \frac{ab\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(b^2 - a^2m^2)}}, \frac{\sqrt{(b^4 + a^4m^2)}}{\sqrt{(a^2m^2 - b^2)}}$; en que se nota que si el 1.° es real, el 2.° es imajinario, por la naturaleza de los denominadores: es decir, que solo uno de los diàmetros encuentra á la hipérbola: el otro encontrará á la conjugada.

Suponiendo $b^2 > a^2m^2$, i cambiando el signo á la cantidad del radical inferior en el 2.° valor, para que represente una línea, son $\ldots a' = \frac{ab\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(b^2 - a^2m^2)}}, b' = \frac{\sqrt{(b^4 + a^4m^2)}}{\sqrt{(b^2 - a^2m^2)}} \ldots . (11)$ los semidiámetros, análogamente á la elipse.

Para el ángulo que forman entre sí dan sus ecuaciones; $\ldots sen.\ \theta = \frac{b^2 - a^2m^2}{\sqrt{(b^4 + a^4m^2)}\sqrt{(1+m^2)}} \ldots (12)$

De estos tres valores combinados sale; $\ldots a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$; $a'b'\ sen.\ \theta = ab \ldots (13)$; lo cual espresa «que en la hipérbola la diferencia de los cuadrados de cualesquiera semidiámetros conjugados es constante, é igual á la de los cuadrados de los semiejes; i el paralelógramo de los semidiámetros equivalente al rectángulo de los semiejes.» Tambien $4a'b'\ sen.\ \theta = 4ab$: esto es; el paralelógramo conjugado $A'B'C'D'$ (Fig. 94) equivalente al rectàngulo $ABCD$ de los ejes.

Representan M i M' las ramas de la hipérbola que se considera, i N, N' las de su conjugada.

Siendo equilátera la hipérbola, i por tanto $a = b$, es $a'^2 - b'^2 = 0$, $a' = b'$: «todo diàmetro es igual á su conjugado.» Resulta así mismo en (8) . . $tanj.\alpha\ tanj.\epsilon = 1$: «que entonces los diámetros conjugados forman con el eje trasverso àngulos complementarios.»

Dadas tres de las seis cantidades $a, b, a', b', \alpha, \epsilon$, pueden hallarse las otras tres por medio de las dos ecuaciones (13) i de la (8); teniendo presente que $\theta = \epsilon - \alpha$.

Llámanse *cuerdas suplementarias* en la hipérbola dos concurrentes en un punto de la curva i que se apoyan en los estremos de un diàmetro; como las em, $e'm$ (Fig. 95) que insisten sobre el diámetro ee'.

Para un diàmetro cd paralelo á la cuerda $e'm$, aparece su conjugado gh paralelo tambien á la suplementaria em, supuesto que ha de dividir por mitad á $e'm$ i á ee'. «Dos cuerdas suplementarias son pues siempre paralelas á un sistema de diámetros conjugados.» Analíticamente se demostraria, como para la elipse, esta propiedad, i que la tanjente en el estremo de un diámetro es paralela al conjugado; deduciéndose iguales consecuencias.

Se trazarán dos diámetros conjugados que formen entre sí un ángulo dado, por la misma construccion empleada para la elipse. El problema es siempre posible, como se advertirà buscando la solucion analítica, ó simplemente cambiando b^2 en $-b^2$ en la fórmula (J), Leccion 25. No hai aquí límites para el ángulo de dos diámetros, ó de dos cuerdas suplementarias.

LECCION 29.

La Hipérbola.—(*Continuacion.*)

La ecuacion de la hipérbola, referida á sus diámetros conjugados en jeneral como ejes coordenados, es segun la Leccion precedente ... $My^2 + Nx^2 = -a^2 b^2$, siendo M funcion de ϵ i N funcion idéntica de α, i entrando en ambos valores de igual manera los semiejes.

Ya que M i N han de ser de contrarios signos, si se supone M positiva puede escribirse la ecuacion así; ... $My^2 - Nx^2 = -a^2 b^2$ ... (1).

De (1) sale ... $\frac{My^2}{a^2 b^2} - \frac{Nx^2}{a^2 b^2} = -1$; ó bien ... $\frac{y^2}{\frac{a^2 b^2}{M}} - \frac{x^2}{\frac{a^2 b^2}{N}} = -1$; en donde, á virtud del principio de homojeneidad, supuesto que hai un término, (-1), de dimension nula, todos los demas deben ser lo mismo, representando por consiguiente áreas los quebrados $\frac{a^2 b^2}{M}$, $\frac{a^2 b^2}{N}$.

Haciendo allí pues .... $\frac{a^2 b^2}{M} = b'^2$, $\frac{a^2 b^2}{N} = a'^2$, resulta; ... $a'^2 y^2 - b'^2 x^2 = -a'^2 b'^2$ ... (2); ecuacion de la misma forma que la referida á los ejes, i en que $2a'$, $2b'$ representan las magnitudes finitas de dos diámetros conjugados, como en la Leccion 26. La ecuacion referida á los ejes es caso particular de la (2); el caso único de los diámetros conjugados perpendiculares.

Todas las propiedades i consecuencias deducidas hasta ahora para la hipérbola de aquella ecuacion, relativas á los ejes é independientes de su inclinacion, convienen por tanto á los diámetros conjugados oblicuos.

Dados de magnitud i posicion dos diámetros conjugados, puede construirse sobre ellos una falsa hipérbola tomándolos por ejes, i trazarse en seguida la verdadera dando á las ordenadas la inclinacion del ángulo de los diámetros.

Conocida la magnitud de un diámetro trasverso $2a'$, la del conjugado será el duplo del valor de y que dé la abscisa $x = a'\sqrt{2}$. Gráficamente podrà hallársela por varias construcciones, ó por la hipérbola conjugada.

Se sabrá si un punto (α, β) está en la curva, dentro ó fuera, segun aparezca que....., $a'^2\beta^2 - b'^2\alpha^2 + a'^2 b'^2$ es $=$, $<$ ó >0. Tambien resulta jeneralizada la propiedad de la hipérbola, de «que los cuadrados de las ordenadas ó semi-cuerdas de un diámetro son proporcionales con los productos de los segmentos del mismo diámetro contados desde su pie hasta sus intersecciones con la curva.»

La ecuacion jeneral de la tanjente en un punto (x', y') es.. $a'^2 yy' - b'^2 xx' = -a'^2 b'^2$.

$y=0$; .. $x=\dfrac{a'^2}{x'}$ } Distancia del orijen (el centro) al pie de la tanjente en el eje de las x. Este valor ofrece el medio para tirar una tanjente, lo mismo que en la elipse, desde un punto esterior que puede considerarse como el pie de la tanjente: i no variando si se cambia y' en $-y'$, manifiesta «que el diámetro que pasa por el punto de concurso de dos tanjentes divide por mitad la cuerda de contacto.»

Es notorio que para la hipérbola se verifica igualmente «que si de varios puntos de una recta se tiran pares de tanjentes á la curva, todas las cuerdas de contacto se cortarán en un mismo punto del diámetro conjugado del paralelo á dicha recta;» i tambien lo recíproco.

Siendo ejes coordenados los diámetros $2a'$, $2b'$, las ecuaciones de otro sistema cualquiera de diámetros conjugados son como ántes; ... $y=mx$, $y=\dfrac{b'^2}{a'^2 m}x$.

Propiedades referentes à las asíntotas. Son mui dignas de atencion, por su importancia.

Partiendo de la ecuacion (2) de la hipérbola, referida á dos diámetros conjugados cualesquiera $2a'=AA'$, $2b'=BB'$ (Fig. 96), se hallan para las asíntotas, por los métodos conocidos, las ecuaciones... $y=\dfrac{b'}{a'}x$, $y=-\dfrac{b'}{a'}x$.

Formando el paralelógramo conjugado $cdc'd'$, la diagonal $c'd$ que pasa por el centro O (el oríjen) i por el punto d, (a', b'), tiene por ecuacion ... $y=\dfrac{b'}{a'}x$.

I la otra diagonal cd', que pasa por el punto d' $(a', -b')$ ... $y=-\dfrac{b'}{a'}x$.

Son las mismas ecuaciones anteriores. De manera que «las asíntotas de la hipérbola coinciden con las diagonales de cualquiera de los paralelógramos conjugados, incluso el de los ejes,» i estos dividen por mitad el ángulo de las asíntotas, como ya se habia visto. «Los vértices de los ángulos de todos los paralelógramos conjugados están en las asíntotas.»

Sea dd' una tanjente en A. Tirando el diámetro AA', su conjugado BB' resultará paralelo á dd' que será lado del paralelógramo, i será $Ad=Ad'$. Es decir: «que la tanjente que se apoya en las asíntotas está dividida por mitad en el punto de contacto.» Para tirar pues por A una tanjente, se tirará Ag paralela á una asíntota Od, se tomará $gd'=Og$, i $d'A$ será la tanjente supuesto que resulta $Ad=Ad'$.

Si por h, punto medio de una cuerda mm', se tira el diámetro hAO, el conjugado BB' será paralelo á mm' i á la tanjente dd' en A; i por ser en el triángulo eOe', $Ad=Ad'$, es tambien $he=he'$, de donde $he-hm=he'-hm'$, ó bien ... $em=em'$. «Son iguales los dos segmentos de una secante comprendidos entre la curva i las asíntotas.»

Lo cual se verifica aun cuando la secante vaya de una rama á otra, como la nn'; pues tirando el diámetro paralelo AA' i su conjugado BB', se ve que $rn=rn'$, $Bd=Bc$, $rs=rs'$, i por tanto.... $rn-rs=rn'-rs'$, ó bien ... $sn=s'n'$.

«En consecuencia, dadas las asíntotas $c'd$, cd', i un punto m de la hipérbola, pueden hallarse cuantos puntos mas se quiera de ambas ramas, vgr. el m'; tirando una recta eme', i tomando luego $e'm'=em$.»

Para un punto e de la asíntota Oe se tiene ... $eh=y=\dfrac{b'}{a'}x$, segun su ecuacion.

La ordenada del punto m de la curva, correspondiente á la misma abscisa Oh, es....

$mh=y'=\dfrac{b'}{a'}\sqrt{(x^2-a'^2)}$, tambien segun su ecuacion.

Cuadrando i restando sale; .. $y^2-y'^2=\dfrac{a'^2b'^2}{a'^2}=b'^2$; $(y+y')(y-y')=b'^2$; $y+y'=e'm$; $y-y'=em$.

Obtiénese por tanto; ... $\overline{OB}^2=em\times e'm$. «El semi-diámetro paralelo á una secante es medio pro-

porcional entre los segmentos de la secante comprendidos entre una de las intersecciones con la curva i las asíntotas.» I si se tiran diversas secantes paralelas, «los productos de los segmentos indicados serán todos iguales,» por serlo al cuadrado del semidiámetro paralelo.

Si se diesen la direccion de un diámetro no trasverso BB', las asíntotas Od, Od', i un punto m de la curva, tirando la recta eme' i hallando una media proporcional entre me i me' se obtendria la magnitud del semi-diámetro OB: la direccion del conjugado seria Oh, por el punto medio de ee', i su magnitud OA se determinaria formando el paralelógramo $cd\,c'\,d'$. Dadas las asíntotas i un punto de la curva, la direccion de los ejes es la de las bisectrices de los ángulos, i su magnitud la que resulte de las mismas construcciones.

Para hallar directamente la ecuacion de la hipérbola referida á sus asíntotas Oc (Fig. 97) como eje de las x, i Od como eje de las y, sea α el ángulo que cualquiera de ellas forma con el eje trasverso; i por consiguiente ... $ang.\ YOX = 2\alpha$.

De un punto m de la curva tírense mp, mq paralelas á los ejes coordenados: se tendrá $Op = x$, $Oq = y$; i $Opmq = xy\ sen.\ 2\alpha$ ... (a). I tomando $pc = Op$, la cmd será tanjente, i el triángulo Ocd la cuarta parte del respectivo paralelógramo conjugado. Hai que determinar $sen.\ 2\alpha$.

$$Tanj.\ \alpha = \frac{b}{a};\ sen.\ \alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}};\ cos.\ \alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}};\ ..\ sen\,2\alpha = 2\ sen.\ \alpha\ cos.\ \alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$Opmq = \frac{1}{2}\ Ocd$; $Ocd = ab$ ... ((13) Leccion 28).

Sustituyendo en (a); ... $xy \times \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\ ab$; ó bien ... $xy = \frac{a^2+b^2}{4}$ (3); ecuacion buscada.

Llámase *potencia de la hipérbola* al valor $\frac{a^2+b^2}{4} = p^2$; «la cuarta parte de la suma de los cuadrados de los semiejes.» En la hipérbola equilátera, en que $a = b$, la ecuacion es ... $xy = \frac{1}{2}a^2$ .. (4).

Para cualquier otro punto m' se tendria ... $Op'm'q' = \frac{1}{2}ab$; de manera que «son equivalentes entre sí, i con la mitad del rectángulo de los semiejes, los paralelógramos comprendidos entre las asíntotas i cualquier punto de la curva.»

Es notorio que para un punto r situado fuera de la curva, por menguar la ordenada, es $xy < p^2$, ó $xy - p^2 < 0$; i para un punto interior s, en que la ordenada crece, $xy - p^2 > 0$.

Sean dos puntos m, n de la hipérbola (Fig. 98). Tírense por ellos paralelas á las asíntotas OX, OY, i los radios mO, nO: resultará lo que va á demostrarse.

1.°—Por cuanto los paralelógramos $Opp'm$, $Oqq'n$ son equivalentes, será ...;

$Opp'm - Opp'r + mrn = Oqq'n - Opp'r + mrn$; ó bien ... $p'q'mn = pqmn$.

2.°—Por cuanto los triángulos Omp, Omq son equivalentes, será; ....

$Omp - Ops = Omq - Ops$; ó bien $Oms = pqns$; de donde .. $Omn = pqmn$.

Es pues ... $Omn = pqmn = p'q'mn$. «Un sector Omn es equivalente á los cuadriláteros que insisten sobre el mismo arco mn, formados por rectas paralelas á las asíntotas i por las partes interceptadas del arco i de la respectiva asíntota.»

Como en todo paralelógramo las diagonales se dividen por mitad una á otra, la asíntota Od (Fig. 96) dividirá por mitad á la recta AB. Segun esto, «las asíntotas son bisectrices de las rectas que unen los estremos de cualesquiera diámetros conjugados.»

LECCION 30.

La Hipérbola.—*(Conclusion.)*

La importancia de las propiedades de la tanjente i de la secante con relacion á las asíntotas hace necesario no omitir la demostracion analítica de los dos teoremas principales deducidos en la Leccion anterior.

Considerada la ecuacion $xy = p^2$ de la hipérbola referida á sus asíntotas, la de la tanjente en un punto (x', y') es ... $y'(x-x')+x'(y-y')=0$; siendo y' la derivada con respecto á x, i x' la derivada con respecto á y. Sea cd (Fig. 97) la tanjente en m.

Simplificando, por ser $-2x'y' = -2p^2$, la tanjente es ... $xy'+yx'=2p^2$ .. (A).

De $y=0$ en (A) sale ... $x=\frac{2p^2}{y'}=\frac{2x'y'}{y'}=2x'$; valor de $Oc=2Op$.

Pues que pm i Od son paralelas, i $Op=pc$, es $mc=md$. «La subtanjente es igual á la abscisa. La tanjente está dividida por mitad en el punto de contacto.»

Sea $y=mx+q$ la ecuacion de una secante. Eliminada y entre esta ecuacion i la de arriba de la hipérbola, se obtiene ... $mx^2+qx-p^1=0$ .. (B); cuyas dos raices son las abscisas de los puntos de interseccion de la secante con la curva: la del punto intermedio, punto medio de la cuerda, es la semisuma de las raices, á saber, ... $-\frac{q}{2m}$.

Las abscisas de las intersecciones de la misma secante con las asíntotas son; para la Od, que es el eje de las y, .. $x=0$; para la Oc, eje de las x, .. $x=-\frac{q}{m}$: i la del punto intermedio de la recta, entre las dos asíntotas, es tambien la semisuma de estos dos valores, es decir, .. $-\frac{q}{2m}$.

Aparece ser uno mismo el punto intermedio, para la parte de la secante comprendida en la curva i para la parte comprendida entre las asíntotas: segun lo cual, reiterando lo dicho para la figura 96, «los segmentos de la secante comprendidos entre la hipérbola i las asíntotas son iguales.»

Si la secante, moviéndose paralelamente á sí misma, se convirtiese en tanjente, los estremos de la cuerda se confundirian en el punto de contacto, i los segmentos iguales serian entónces las distancias de ese punto á las asíntotas. Nueva demostracion del primer teorema.

Considerados dos puntos de la hipérbola, cuyas coordenadas con referencia á las asíntotas sean x', y', x'', y'', es ... $x'y'=x''y''$; de donde ... $x' : x'' :: y'' : y'$. «Las ordenadas están en razon inversa de las abscisas.» Si se supone una serie de abscisas en progresion creciente jeométrica, las respectivas ordenadas formarán otra serie en progresion jeométrica decreciente: i si la razon en la una progresion es q, será inversa la de la otra, es decir, $\frac{1}{q}$.

Ecuacion polar de la hipérbola — Situando el polo en el foco positivo F (Fig. 99), i tomando por semieje polar positivo á FO en el eje trasverso, las coordenadas polares de un punto m serán el radio vector $mF=r$, i el ángulo $mFO=\varphi$.

Referida la ecuacion de la hipérbola al centro i á los ejes, se tiene para el mismo radio vector mF el valor $r=\frac{cx-a^2}{a}$ (Leccion 27); ó bien ... $ar=cx-a^2$; siendo x la abscisa Op, i la escentricidad $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$. Hai que eliminar x, introduciendo su valor en funcion de las coordenadas polares.

$$x=Op=OF+Fp=c+Fm\ cos.\ mFp=c-Fm\ cos.\ mFO=c-r\ cos\ \varphi.$$

La sustitucion da; .. $ar=c(c-r\ cos.\ \varphi)-a^2$; de donde $r=\frac{c^2-a^2}{a+c\ cos.\ \varphi}$; ó .. $r=\frac{b^2}{a+c\ cos.\ \varphi}$ .. (1)

Para introducir el parámetro $2p=\frac{2b^2}{a}$, i la relacion $\frac{c}{a}=e$, se pondrá ap por b i ae por c: resulta ... $r=\frac{p}{1+e\ cos.\ \varphi}$ ... (1'). Ecuacion de forma igual á la de la elipse; pero aquí es $e>1$, i el àngulo φ se cuenta en sentido contrario.

Tambien se obtendria la ecuacion (1) por este otro procedimiento.

$F'm=2a+Fm=2a+r$; $F'm=\sqrt{(F'\overline{F}^2+F\overline{m}^2+2FF'\times Fp)}=\sqrt{(4c^2+r^2+4c\times -r\ cos.\ \varphi)}$.

Cuadrando é igualando los dos valores de $F'm$, i despejando r, sale; .. $r=\frac{c^2-a^2}{a+c\ cos.\ \varphi}$.

Cuadratura de la hipérbola — En una curva abierta infinita, cual lo es la hipérbola, solo puede en jeneral averiguarse el valor del área del segmento comprendido entre una cuerda i un arco, ó entre dos cuerdas i dos arcos interceptados por ellas, diferencia de dos segmentos de la 1.ra especie. Para computar (Fig. 100) el área del segmento *man*, siendo *Op*, *Oq* las asíntotas, á las cuales se han tirado por *m* i *n* las paralelas *mq*, *np*, se buscará la del espacio cerrado por estas dos rectas, las asíntotas i el arco *man*; que restada de la del pentágono *Oqmnp* dará la del segmento. Si son *Oa* el eje trasverso i *r* un vértice de la hipérbola, i se tira la *as* paralela á *Oq*, que resulta igual con *Os*, la cuestion está reducida á investigar el valor jeneral del área del espacio asintótico *asnp*.

Sea ahora una hipérbola equilátera referida á sus asíntotas (Fig. 101). Tomando por unidad de lonjitud la abscisa *Oa* del vértice *b*, es $Oa = x = 1$, $ab = y = 1$. La ecuacion de la curva es $xy = 1$ . . (2). El cuadrado $Oabd = \frac{1}{2} Ob = \frac{1}{2} a^2 = 1$, es *la potencia* de la hipérbola. Todos los paralelógramos rectàngulos asintòticos equivalen à la unidad de superficie.

Bájense de otros diversos puntos, b', b'' &c las ordenadas $b'a'$, $b''a''$ &c, i prolongàndolas fórmense los rectángulos *ac*, *a'c'* &c. La suma de estos rectángulos, entre la ordenada *ba* i otra cualquiera *mp* por límites, diferirà tanto menos del área del espacio que encierran dichas ordenadas, la parte *ap* de la asíntota *OX* i el arco *bm*, cuanto mas próximos estén los puntos *b*, b', b'' &c.

Designando por x', x'' &c las abscisas Oa', Oa'' &c, i por x la Op, para las ordenadas $b'a'$, $b''a''$, .. mp, dará la ecuacion (2) los valores inversos $\frac{1}{x'}, \frac{1}{x''} \ldots \frac{1}{x}$; i como $Oa = 1$, será $aa' = x' - 1$, $a'a'' = x'' - x'$, $a''a''' = x''' - x''$ &c, i las áreas $ac = (x' - 1) \times 1$; $a'c' = (x'' - x') \times \frac{1}{x'} = \frac{x'' - x'}{x'}$; $a''c'' = \frac{x''' - x''}{x''}$, &c.

Tómense las abscisas 1, x', x'' ... x en progresion jeométrica, de modo que sea $x'' = x'^2$, $x''' = x'^3$, ... $x^{(n)} = Op = x'^n$: entónces, como puede verse, todas las áreas *ac*, *a'c'*, *a''c''* &c son iguales á $x' - 1$.

A virtud de esta igualdad, con el primer rectángulo *ac*, con $ac + a'c'$, con $ac + a'c' + a''c''$ &c, i con las abscisas de los límites de estos sucesivos conjuntos, se pueden formar dos progresiones correlativas, una aritmética para las áreas i otra jeométrica para las abscisas, de la manera que sigue;

Areas; . . . . ÷ 0 . $x' - 1$. $2(x' - 1)$. $3(x' - 1)$ . . . $n(x' - 1)$
Abscisas; . . ∺ 1 : x' : x'^2 : x'^3 : . . x'^n ó $x = Op$ } (C)

«Las áreas son pues logaritmos de las abscisas.» I designando por *e* la base de este sistema de logaritmos, será; . . $e^{x' - 1} = x'$; . . $e^{2(x' - 1)} = x'^2$; . . $e^{n(x' - 1)} = x'^n$ . . (D).

O bien, por cuanto $x'^n = x$, de donde sale $x' = \sqrt[n]{x}$; . . $e^{n(\sqrt[n]{x} - 1)} = x$ . . . (D').

El esponente . . $n(\sqrt[n]{x} - 1)$ representa la suma de *n* rectángulos comprendidos entre las dos ordenadas *ab*, *mp*; i para que represente el espacio asintótico *abmp* es necesario que venga á ser $n = \infty$.

Para determinar la base *e*, supóngasela abscisa del límite variable *mp*: entonces la ecuacion (D') es . . $e^{n(\sqrt[n]{e} - 1)} = e$; que dividida por *e* da . . $e^{n(\sqrt[n]{e} - 1) - 1} = 1$.

Aquí es . . $n(\sqrt[n]{e} - 1) - 1 = log.\ 1 = 0$; de donde . . $\sqrt[n]{e} - 1 = \frac{1}{n}$: . . $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . . . (E).

Desarrollado en (E) el 2.º miembro; . . $e = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$

O bien; . . $e = 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4n}\right) + \ldots$

I finalmente, haciendo $n = \infty$; . . . $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$ (F)

Los logaritmos *hiperbólicos* cuya base es *e*, se llaman *neperianos* por *Neper* su inventor. El valor de la serie (F) puede fácilmente aproximarse cuanto se quiera por decimales, supuesto que cada término, desde el 3.º para adelante, es el que le antecede dividido por el nuevo factor de la serie de los números naturales que se agrega al denominador.

Tomando nueve términos, es . . $e = 2,718281828459$; hasta la 12.ª cifra decimal.

Está hallada así la base del sistema (C) de logaritmos correspondiente á la hipèrbola equilátera i á $p^2 = 1$, siendo n infinita; esto es, cuando el conjunto de los rectángulos comprendidos entre las dos ordenadas límites ba, mp, representa el trapecio mismo asintótico $bamp$. Tomando pues, en las tablas de esta base, el logaritmo de la abscisa Op, ó sea *de la mayor abscisa*, este logaritmo será el valor del área del trapecio, en unidades de superficie; en virtud de lo deducido arriba, á saber: «que las áreas son los logaritmos de las abscisas.

Para la hipérbola no equilàtera, siendo tambien ejes coordenados las asíntotas, i unidad de lonjitud la abscisa del vértice, igual con la ordenada, la ecuacion de la curva es la misma; . . . $xy = 1$.

Hechas las mismas construcciones i consideraciones que en el caso anterior, los rectángulos $ac, a'c'$ &c son paralelógramos oblicuángulos, cuyas áreas para abscisas en igual proporcion jeométrica tienen todas el valor $(x' - 1)\ sen\ \beta$, llamando β al ángulo de las asíntotas; i pueden formarse como antes las dos progresiones siguientes;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Areas; . . . .} \div 0 . (x'-1)\ sen\ \beta . 2\,(x'-1)\ sen\ \beta . 3\,(x'-1)\ sen\ \beta \ldots n\,(x'-1)\ sen\ \beta \\ \text{Abscisas; . .} \div 1 : x' : x'^2 : x'^3 : \ldots x'^n = x\end{array}\right\} \quad (G)$$

De manera que «las áreas son igualmente los logaritmos de las absisas.» I designando por a la base de este otro sistema de logaritmos, es $a^{(x'-1)\ sen\ \beta} = x'$; . . $a^{n\,(x'-1)\ sen\ \beta} = x'^n = x$ . . . (H)

Sea . . $a^{sen\ \beta} = b$ } Será en (H) . . $b^{n\,(x'-1)} = x$; ò bien . . . $b^{n\,(\sqrt[n]{x}-1)} = x$ . . . . (H′); que comparando con (D′) da $b = e$, ó lo que es lo mismo, $a^{sen\ \beta} = e$: ecuacion de relacion entre las dos bases i el ángulo de las asíntotas.

Pasando á los logaritmos se tiene . . $sen\ \beta\ log.\ a = log.\ e$: i tomando los neperianos . . $sen\ \beta\ L.\ a = 1$: ecuacion de relacion entre el àngulo β de las asíntotas i la base a del respectivo sistema de logaritmos hiperbólicos, por la cual usando de las tablas de Neper se hallará la base dado el ángulo, ó el ángulo dada la base.

Búscase, por ejemplo, el ángulo asintótico correspondiente á los logaritmos ordinarios cuya base es 10.

$$Sen\ \beta\ L.\ 10 = 1;\ sen\ \beta = \frac{1}{L.\ 10} = \frac{1}{2,3025851\ \&c\ (L.\ N.)} = 0,\ 43429448\ \&c.$$

Es el seno del ángulo de 25.° 44′. 25″ (*div. sex.*); que será el de las asíntotas.

«Los logaritmos ordinarios de las respectivas *mayores abscisas* representan pues las áreas de los trapecios asintóticos *bamp* de una hipérbola en que el ángulo de las asíntotas es de 25.° 44′. 25″, i siendo $p^2 = 1$; es decir, siendo unidad de medida superficial la potencia de la misma hipérbola.»

Comparadas las series (G) i (C) se observa: «que deben multiplicarse los logaritmos neperianos por $sen\ \beta = \frac{1}{L.\ a}$, ó lo que es igual, dividirse por el logaritmo neperiano de a, para obtener los logaritmos de los mismos números en el sistema de la base arbitraria a». Lámase *módulo* á este multiplicador.

Como se ha visto, el área del espacio asintótico no se obtiene esacta, sino por aproximacion: de manera que tampoco podrá ser esacta sino aproximada la del segmento hiperbólico. Por tanto, la hipérbola no es curva cuadrable.

LECCION 31.

La Parábola.

SECCION 16. — La Parábola.

Segun lo visto en la Leccion 21, hai un sistema *único* de ejes rectangulares, respecto de los cuales la ecuacion de la parábola es . . . . . $y^2 = 2px$ . . (1).

Esta forma indica por sí misma: 1,° que la curva pasa por el oríjen de las coordenadas; 2,° que el

eje de las x es *eje de la paràbola*, dividiéndola simétricamente; i 3.° que el coeficiente $2p$ (el *paràmetro*) i la abscisa deben siempre ser de un mismo signo para que tenga la ordenada valores reales, es decir, para que haya curva. El orìjen O (Fig. 102) es el *vértice* de la parábola, mOn: se supondrá p positiva, i por tanto la curva está del lado de las x positivas, limitándola como tanjente en el vértice el eje de las y: el eje de la curva es OX.

La ecuacion (1) tambien manifiesta «que en la parábola la ordenada ó perpendicular al eje es media proporcional entre el parámetro i la abscisa.»

Dándose pues la magnitud $2p = Ob$ del parámetro, si se toma á continuacion una abscisa Op, i sobre $bp = Ob + Op$ como diámetro se traza una semi-circunferencia de círculo, la perpendicular Oc será la magnitud de las ordenadas pm, pn; i m, n, serán puntos de la parábola respectiva, cuyo vértice es O.

Referida la elipse al vértice negativo, al eje mayor i al parámetro, su ecuacion es ((5) Leccion 22) ... $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, en donde haciendo $a = \infty$ se obtiene ... $y^2 = 2px$. Puede considerarse por tanto á la parábola «como una elipse infinitamente alargada, ó cuyo eje mayor es infinito,» lo cual se verá con perfecta claridad mas adelante: i de esta sola consideracion se deducirian casi todas las propiedades de la curva.

Para dos puntos m, m', se tiene; ... $\overline{mp}^2 = 2p \times Op$; $\overline{m'p'}^2 = 2p \times Op'$; .. $\overline{mp}^2 : \overline{m'p'}^2 :: Op : Op'$.

Es decir: «que en la parábola los cuadrados de las ordenadas al eje son proporcionales con las abscisas correspondientes;» propiedad característica de esta curva, i deducible de la de la elipse haciendo infinitos el eje i el segmento al vértice positivo.

Notoriamente para un punto (x, y) esterior es $y^2 > 2px$, ó $y^2 - 2px > 0$, i para uno interior $y^2 - 2px < 0$.

Foco i directriz—Se vió en la Leccion 23 que todo punto de la parábola equidista del foco i de la directriz. Van á buscarse analíticamente las posiciones de la directriz i del foco como para las otras dos curvas, «buscando el lugar jeométrico de los puntos del plano equidistantes (Fig. 103) de un punto F i de una recta cd.»

Sea eje de las x la Fd, perpendicular sobre cd, i eje de las y la OY perpendicular en la mitad de Fd. Será desde luego punto i vértice de la curva el oríjen O, por equidistar del foco i de la directriz i estar situado en el eje.

Suponiendo que sea m otro punto de la curva, i mc perpendicular sobre cd, se tendrá ... $Fm = mc$.

Bajando la ordenada mp, i haciendo $OF = Od = d$, se obtiene;

$Fm = \sqrt{(\overline{mp}^2 + \overline{Fp}^2)} = \sqrt{(y^2 + (x-d)^2)}$; $mc = pd = Op + Od = x + d$.

$\overline{Fm}^2 = \overline{mc}^2 \rightarrow y^2 + (x-d)^2 = (x+d)^2$; de donde .. $y^2 = 4dx$; ecuacion de una parábola cuyo parámetro $2p = 4d$, i que da .. $d = \frac{1}{2}p$. En consecuencia, «el foco se halla situado en el eje de la parábola; i la distancia del vértice al foco i al pie de la directriz es la cuarta parte del parámetro.» El foco tiene por abscisa $x = OF = \frac{1}{2}p$, i el pie de la directriz $x = -Od = -\frac{1}{2}p$.

El valor del *radio vector* Fm es $\sqrt{(y^2 + (x-d)^2)} = \sqrt{(4dx + (x-d)^2)} = x + d = x + \frac{1}{2}p$ .. (2).

Este valor es funcion racional de la abscisa, como para las otras curvas del 2.° grado, i bastante notable. «El radio vector de cualquier punto de la parábola equivale á la abscisa al eje del mismo punto mas la 4.ª parte del parámetro.»

Introduciendo por x en (1) el valor $\frac{1}{2}p$ de la abscisa del foco, sale ... $y = \pm p$; la mitad del parámetro.

Para un punto e esterior á la parábola, tirando de él la recta eF al foco, i la ec perpendicular á la directriz hasta cortar á la curva en m, se tiene; $eF + em > Fm$; i por cuanto $Fm = mc$, ... $eF + em > ce + em$; de donde $eF > ce$; «que el punto dista mas del foco que de la directriz.» Para un punto interior e' es $e'F < e'c$.

Dados el foco F i la directriz cd de una parábola, se determinará un punto cualquiera m, correspondiente à una abscisa Op, por la interseccion de la perpendicular pm con un arco de círculo trazado desde F como centro i con radio igual á pd: son dos intersecciones, que dan dos puntos por encima i por debajo del eje.

Se trazará por continuidad la parábola aplicando á cd un brazo de una escuadra dce' en cuyo estremo

opuesto e' esté fijado un estremo de un hilo igual á $e'c$, hallándose tambien fijo el otro estremo en el foco F: se moverá la escuadra á lo largo de la directriz, de manera que las dos partes $e'm$, mF del hilo se conserven tirantes con un lápiz aplicado al brazo $e'c$.

Todo lo acabado de decir relativamente al foco i á la directriz puede sacarse de lo ya conocido en la elipse, introduciendo el parámetro i suponiendo el eje mayor infinito.

La distancia del vértice al foco es en la elipse ... $a-c=a-\sqrt{(a^2-b^2)}=a-\sqrt{(a^2-ap)}$.

Multiplicando i dividiendo por $a+\sqrt{(a^2-ap)}$ sale ... $a-c=\frac{ap}{a+\sqrt{(a^2-ap)}}$;

O bien ... $a-c=\frac{p}{1+\sqrt{(1-\frac{p}{a})}}$; en que haciendo $a=\infty$ queda $a-c=\frac{1}{2}p$, abscisa del foco en la parábola.

La distancia del centro á la directriz en la elipse (Leccion 22) es ... $\alpha=\frac{a^2}{c}$.

La del próximo vértice á la directriz será ... $\frac{a^2}{c}-a=\frac{a}{c}(a-c)$ ... (m).

Pero $\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{(a^2-ap)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{p}{a})}}=1$ cuando $a=\infty$; $a-c=\frac{1}{2}p$ en la misma hipótesis; luego en tal caso, que es el de la parábola, el valor absoluto (m) de la abscisa del pie de la directriz se reduce á $\frac{1}{2}p$.

Últimamente: en la elipse, referida al centro i á los ejes, el radio vector que parte del foco negativo es ... $a+\frac{cx}{a}$.

Pasando el oríjen al vértice negativo, i poniendo en consecuencia $x-a$ por x, el mismo radio vector será entónces ... $a-c+\frac{cx}{a}$.. (n).

Si $a=\infty$, es $a-c=\frac{1}{2}p$; $\frac{c}{a}=1$, porque acaba de verse que $\frac{a}{c}=1$, en igual suposicion.

Sustituyendo en (n), el valor del radio vector para la parábola es $x+\frac{1}{2}p$.

Uso del foco i de la directriz para tirar tanjentes à la paràbola—(Fig. 104).

1.° – Por un punto m de la curva. Tirando el radio vector Fm, i la mc perpendicular sobre la directriz cd, la mq bisectriz del ángulo Fmc es tanjente.

Bastaria para convencerse de ello notar que mc viene á ser el otro radio vector del punto m, considerada la parábola como elipse infinita; pero se demostrará directamente, probando que cualquier otro punto e de mq está fuera de la curva.

Tírense Fc, eF, ec, i la perpendicular eb sobre cd. Por ser $mF=mc$, es $aF=ac$, mq perpendicular sobre Fc, i $eF=ec$; i como $ec>eb$, es $eF>eb$, i el punto e es punto esterior.

2.° – Por un punto esterior e. Desde e, con radio eF que necesariamente es mayor que la perpendicular eb trácese un arco de círculo que cortará á cd en dos puntos, i sea uno de ellos c. La cg paralela al eje dará el punto de contacto m; ó bien levántese aq perpendicular en el medio de Fc; ó bájese desde e la perpendicular. Cualquiera que sea la construccion, resulta eq, tanjente en m. La 2.ª tanjente se tiraria por el mismo procedimiento.

Nótese; 1.° – Que a, punto medio de Fc, *pie de la perpendicular bajada del foco sobre la tanjente*, se halla siempre en OY, *tanjente al vértice*; porque en el triángulo cdF son paralelas cd i Oa, i $OF=Od$. Así debia ser, segun lo demostrado para la elipse (Leccion 23, prob. 2.°), considerada OY como la circunferencia de un círculo de radio infinito. Para tirar pues desde e las dos tanjentes posibles, podria trazarse sobre eF como diámetro una semi-circunferencia que daria en OY los dos puntos a.

Nótese; 2.° — Que por cuanto *àng.* $Fmq=amc=Fqm$, es el triángulo Fmq isósceles, i $Fm=Fq$; es decir «que el foco equidista del punto de contacto i del pie de la tanjente.» Resulta de aquí $am=aq$, i $Op=Oq$, ó bien $pq=2Op$; «que la subtanjente es dupla de la abscisa.» Tambien, que como $\overline{aF}^2=Fq\times OF$, ó bien $aF^2=Fm\times OF$, «la perpendicular tirada del foco sobre la tanjente es media

proporcional entre el radio vector del punto de contacto i la abscisa focal. » I por último, que el pie de las tanjentes tiradas en los estremos de la doble ordenada del foco se confunde con el pie de la directriz.

Para tirar la tanjente en m se puede en consecuencia buscar uno de los dos puntos a ó q, á virtud de las propiedades antedichas; siendo lo mas espedito determinar q por la igualdad de Fm i Fq. I para determinar el foco, dados el eje OX, el vértice O i un punto m de la curva, se bajaria la ordenada mp, se tomaria $Oq = Op$; i tirada la tanjente mq se construiria el ángulo $qmF = mqF$, ó en a, punto medio de mq, se levantaria la perpendicular aF.

Nótese; 3.° – Que si mn es la normal, para la ordenada mp se tiene; $\overline{mp}^2 = pq \times pn$.

Tambien, por la ecuacion de la curva, es $\overline{mp}^2 = 2px = 2x \times p = pq \times p$.

La igualacion de los dos valores da; ... $pq \times pn = pq \times p$; ... $pn = p$.

Segun esto, « en la parábola es constante el valor de la *subnormal*, é igual á la mitad del parámetro. »

La normal mn, perpendicular á la tanjente mq, divide por mitad el ángulo Fmg, suplemento del Fmc. Todos los rayos sonoros ó luminosos que partan del foco ácia la curva, se reflejan paralelamente al eje, i los paralelos al eje se reflejan al foco.

El cuadrilátero $Fcmn$ es un paralelógramo, cuyos lados opuestos Fn, mc, son iguales á la diagonal Fm. Así pues, « la distancia del foco al pie de la normal equivale al radio vector del punto de su interseccion con la curva; i el foco equidista del pie de la tanjente i del pie de la normal. » La semi-circunferencia trazada desde F como centro, i con radio Fm, corta al eje en esos dos puntos.

De la ecuacion de la elipse referida al vértice negativo, al eje mayor i al parámetro, se sacarán los valores de la subtanjente i subnormal para la parábola haciendo $a = \infty$.

LECCION 32.

La Parábola.—(*Continuacion.*)

Por medio de los procedimientos analíticos se ratificará i ampliará la teoría de las tanjentes i normales en la parábola, establecida por consideraciones casi esclusivamente jeométricas en la Leccion anterior.

Partiendo de la ecuacion de la curva . . $y^2 = 2px$ . . (1), la jeneral de la tanjente en un punto (x', y') es . . $y'(y - y') - p(x - x') = 0$ (2).

O efectuando las multiplicaciones, i teniendo en cuenta que $-y'^2 = -2px'$, . . $yy' = p(x + x')$ (3).

Forma la tanjente con el eje de las x un ángulo cuya tanjente trigonomètrica es . . $\frac{p}{y'}$ . . . (4); espresion que discutida para los diferentes valores de y' daria á conocer la forma de la curvatura de la parábola, continuadamente cóncava acia su eje, i que hace ver que la parábola admite tanjentes en cualquiera direccion, ó paralelas á cualquiera recta. Haciendo $\frac{p}{y'} = A$, puede hallarse la ordenada (i por consiguiente la abscisa) del punto de contacto, dada la inclinacion de la tanjente, ó esta inclinacion dada la ordenada. Para el caso de la tanjente paralela al eje, es $A = 0$, $y' = \infty$; de modo que aquella tanjente se halla situada à infinita distancia, lo cual se habia visto en la Leccion 21.

Pruébase de un modo directo que la ecuacion (3) representa una tanjente, sumando la identidad $y^2 = y^2$ con $y'^2 = 2px'$, i restando el duplo de (3).

Resulta . . $(y - y')^2 = y^2 - 2px$, que es todavía la misma recta (3). Mientras y, y', sean desiguales, es positivo el primer miembro, i . . $y^2 - 2px > 0$; i para el solo caso de $y = y'$, es en el 2.° miembro $y'^2 - 2px' = 0$. Todos los puntos de la recta (3) se hallan por tanto fuera de la parábola, esceptuado el (x', y') que está en la curva i es punto de contacto.

Para tirar tanjentes desde un punto cualquiera (α, ε), designando por x', y' las coordenadas desconocidas del punto ó puntos de contacto dan (1) i (3) estas dos ecuaciones; . . . . $y'^2 = 2px'$ . . . . (A); $\varepsilon y' = p(\alpha + x')$ . . . (B).

De ellas se saca; . . $y' = \mathfrak{E} \pm \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - 2p\alpha)}$; . . $x' = \frac{\mathfrak{E}^2 - p\alpha \pm \mathfrak{E}\sqrt{(\mathfrak{E}^2 - 2p\alpha)}}{p}$; valores que introducidos en la ecuacion jeneral (3) dan por ecuaciones de dos tanjentes;

$$y = \frac{p}{\mathfrak{E} + \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - 2p\alpha)}} \times x + M; \; . . \; y = \frac{p}{\mathfrak{E} - \sqrt{(\mathfrak{E}^2 - 2p\alpha)}} \times x + N.$$

Como debió esperarse, este resultado analítico espresa que habrá dos tanjentes, una sola, ó ninguna, segun fuere positivo, nulo ó negativo el binomio $\mathfrak{E}^2 - 2p\alpha$; es decir, segun que el punto sea esterior, de la curva, ó interior. La solucion gráfica puede obtenerse buscando los puntos de contacto como intersecciones de la cuerda de contacto (B) con la curva; para lo cual se construirá la recta que (B) representa jeneralizadas las coordenadas x', y'.

El producto de los coeficientes de x en las ecuaciones de arriba de las dos tanjentes es . . $\frac{p^2}{2p\alpha} = \frac{p}{2\alpha}$; i para que sea $\frac{p}{2\alpha} = -1$, i perpendiculares por lo mismo entre sí las dos tanjentes, ha de ser $\alpha = -\frac{1}{2}p$. Como este valor de la abscisa α pertenece esclusivamente á los puntos situados en la directriz, se deduce que solo en alguno de ellos pueden concurrir dos tanjentes perpendiculares; ó «que la directriz es lugar jeométrico de los vértices de todos los ángulos rectos circunscritos á la parábola.»

Es la directriz, para la elipse de eje mayor infinito, la circunferencia de círculo concéntrica (Leccion 23, fig. 77), cuyo radio es $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, i que corta al eje á una distancia del próximo vértice igual à . . . $\sqrt{(a^2 + b^2)} - a$, ó bien . . $\sqrt{(a^2 + ap)} - a$; pues multiplicado i dividido este valor por $\sqrt{(a^2 + ap)} + a$ da . . $\frac{ap}{a + \sqrt{(a^2 + ap)}} = \frac{p}{1 + \sqrt{(1 + \frac{p}{a})}}$; i cuando $a = \infty$ se reduce á $\frac{1}{2}p$, valor absoluto de la abscisa de la directriz.

Jeométricamente se demuestra la propiedad de la directriz de la parábola acabada de deducir, por la construccion esplicada con la figura 104 para tirar tanjentes desde un punto e esterior. Supóngase (Fig. 105) situado el punto e en la directriz bd. Trazando de e como centro, i con radio eF, una semicircunferencia de círculo, las perpendiculares eh, eh' á las cuerdas bF, aF serán las dos tanjentes: perpendiculares entre sí, por ser recto el àngulo aFb.

Haciendo en (3) $y = 0$, resulta $x = -x'$; esto es (Fig. 104), $Oq = Op$, i por consiguiente $pq = 2Op$, ò «la subtanjente dupla de la abscisa.»

Con facilidad se probaria tambien de nuevo por el cálculo que la tanjente mq bisecta el ángulo Fmc.

La ecuacion de mc es . . $y = y'$; la de Fm . . $y - y' = \frac{2y'}{2x' - p}(x - x')$; i por ser $àng.\ Fmc = mFn$, es $tanj.\ Fmc = \frac{2y'}{2x' - p}$.

De la ecuacion (2) de la tanjente se deduce la de la normal que pase por el punto (x', y') de contacto, introduciendo la condicion de perpendicularidad; i es . . $y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$ . . (5); ó bien . . . $p(y - y') + y'(x - x') = 0$ . . . (6).

Haciendo $y = 0$, se obtiene . . $x - x' = p$; valor constante ya conocido de la subnormal pn.

Para tirar una normal por un punto cualquiera $(\alpha, \mathfrak{E})$, siendo x', y' las coordenadas desconocidas del punto de interseccion con la curva, se combinarán las ecuaciones . . $y'^2 = 2px'$, $\mathfrak{E} - y' = -\frac{y'}{p}(\alpha - x')$, sacadas de (1) i (5).

La eliminacion da . . . $y'^3 + 2p(p - \alpha)y' - 2\mathfrak{E}p^2 = 0$: i como á cada valor de y' corresponde en cualquiera de las dos ecuaciones precedentes uno de x', se ve que pueden tirarse de un solo punto hasta tres normales, si son reales todas las raices de esta ecuacion final en y', i una por lo menos.

Diàmetros de la paràbola—Tiene esta curva infinitos diámetros, i todos paralelos al eje, segun lo visto al fin de la Leccion 21. Esta propiedad, bien perceptible considerada la parábola como elipse de eje mayor infinito, i cuyo centro está por tanto situado sobre el eje à distancia infinita del vértice, va

à ratificarse partiendo de la ecuacion . . $y^2 = 2px$ . . (C), referida al eje; buscándose al mismo tiempo las relaciones que existen entre el foco, el eje i los demas diámetros, llamados *oblicuos* por la oblicuidad de las cuerdas.

Para pasar á los diámetros en jeneral, hai que trasformar las coordenadas, como en las otras curvas: i atendiendo á que, por ser perpendicular al eje el sistema de cuerdas que él divide por mitad, no puede pasar un diámetro oblicuo por el vértice, en que se halla el oríjen para la ecuacion (C), al hacer la trasformacion se variará no solo la direccion de los ejes sino ademas el oríjen.

Poniendo en (C) por x . . . $a + x\,cos.\,\alpha + y\,cos.\,\epsilon$, i por y . . $b + x\,sen.\,\alpha + y\,sen.\,\epsilon$, se obtiene;

$sen.\,\epsilon y^2 + 2\,sen\alpha\,sen\epsilon\,xy + sen^2\alpha\,x^2 + 2\,(b\,sen.\,\epsilon - p\,cos.\,\epsilon)\,y + 2\,(b\,sen.\,\alpha - p\,cos.\,\alpha)\,x + b^2 - 2pa = 0$ .. (D)

Es la trasformada. Para que sea diámetro el nuevo eje de las x, deben anularse en ella los términos 2.° i 4.° que contienen potencias ímpares de y.

Ecuaciones de condicion; . . $sen.\,\alpha\,sen.\,\epsilon = 0$; . . (E); . . $b\,sen.\,\epsilon - p\,cos\,\epsilon = 0$ . . (F).

Sale de (F) . . $tanj.\,\epsilon = \frac{p}{b}$; valor que jamas puede ser nulo, supuesto que no lo es p; i como $tanj.\,\epsilon = \frac{sen\,\epsilon}{cos\,\epsilon}$, tampoco puede ser nulo jamas $sen\,\epsilon$, uno de los factores del primer miembro en (E). Por consecuencia forzosa es $sen\,\alpha = 0$; i $àng.\,\alpha = 0$ ó $àng.\,\alpha = \pi$: lo cual prueba «que todos los diámetros de la parábola son paralelos al eje.»

Pues que $sen\,\alpha = 0$, tambien $sen^2\,\alpha = 0$, i desaparece en (D) el término en x^2.

Supóngase $àng.\,\alpha = 0$: . . es $cos\,\alpha = 1$; $sen^2\,\alpha = 0$; i $tanj.\,\epsilon = \frac{p}{b}$ da . . $sen^2\epsilon = \frac{p^2}{p^2 + b^2}$.

La ecuacion (D) se reduce á . . $\frac{p^2}{p^2 + b^2} y^2 - 2px + b^2 - 2pa = 0$ . . (D′); i para situar el oríjen en el punto de interseccion del diámetro eje nuevo de las x con la curva, se anulará el término independiente, esto es, se hará . . . $b^2 - 2pa = 0$, ó $b^2 = 2pa$, que se ve ser caso particular de (C).

Queda por ecuacion definitiva; . . $y^2 = \frac{2p\,(p^2 + b^2)}{p^2} x = \frac{2\,(p^2 + 2pa)}{p} x$; ó bien $y^2 = 4\,(a + \frac{1}{2}p)\,x$ .. (7)

$4\,(a + \frac{1}{2}p) = 2p'$ } . . $y^2 = 2p'x$ . . (7′). Está referida la parábola á un diámetro oblicuo como eje de las x, con el oríjen en la curva, i siendo tanjente el eje de las y por el hecho de ser paralelo á las cuerdas que bisecta el otro: esto último se reconoce tambien por el valor de $tanj.\,\epsilon = \frac{p}{b}$, que es el mismo (4) particularizado para la ordenada $y' = b$ del nuevo oríjen.

El parámetro $2p'$ del diámetro oblicuo es . . $4\,(a + \frac{1}{2}p)$: tiene de magnitud «el cuádruplo del radio vector de la interseccion del diámetro con la curva» (Leccion 31), por ser a la abscisa de ese punto. Se demostrará ademas que es «la cuerda ó doble ordenada del mismo diámetro que pasa por el foco de la parábola.»

Sea en efecto (Fig. 106) OX el diámetro oblicuo, OY la tanjente, AB el eje, i mn la cuerda paralela á OY que pasa por el foco F. Siendo q el pie de la tanjente en el eje, es $Fq = OF = a + \frac{1}{2}p$ por ser a la abscisa al eje del punto O; i como $Fq = Os$, se tendrá $Os = a + \frac{1}{2}p$. Sustituyendo este valor por x en (7), sale . . $y = sm = 2\,(a + \frac{1}{2}p)$; mitad de la cuerda mn, i mitad del parámetro $2p'$. Segun esto, $OF = \frac{1}{4}mn = \frac{1}{2}sn$; i con respecto à la directriz cd, es $Od' = Os$.

Para construir la parábola por su ecuacion (7′), referida á un diámetro oblicuo OX, i conocido desde luego el ángulo YOX de los ejes coordenados, pudiera procederse de dos maneras: ó considerando al punto s como foco, i al d' como pie de una directriz oblicua $c'd'$ paralela á OY, i aplicando à las coordenadas oblicuas los métodos de construccion de las rectangulares; ó trazando una falsa parábola como si O fuese el vértice, OX el eje i s el foco, i dando luego à las ordenadas la inclinacion de la tanjente OY.

Dado un arco de parábola, la recta bisectriz de dos cuerdas paralelas será un diámetro, i otra paralela en el estremo del diámetro será tanjente á la curva. El eje será una paralela á este diámetro que bisecte una cuerda perpendicular; i hallados el eje i el vértice se determinará el foco de la manera indicada en la Leccion precedente, al fin de la 2.ª nota.

La igualdad de los àngulos que forman con la tanjente el diámetro i el radio vector, proporciona determinar el foco cuando no se conoce el vértice, i por medio del foco el eje. Tirando dos diàmetros i dos tanjentes, el punto de interseccion de los radios vectores de los dos puntos de contacto será el foco.

Si en una parábola se quisiese tirar un diámetro que formase con sus cuerdas un ángulo dado, se tiraria una cuerda que formase con el eje ò con cualquier diámetro este mismo ángulo, i el diámetro bisector de esta cuerda seria el buscado.

LECCION 33.

La Parábola.—(*Conclusion.*)—Nociones complementarias.

Pues que la ecuacion de la parábola referida á cualquier diámetro oblicuo es de la misma forma que referida al eje, todas las propiedades deducidas de esta, independientes del ángulo de los ejes coordenados, se aplican á aquella. Así pues, «los cuadrados de las semicuerdas paralelas ú ordenadas de un diámetro son proporcionales con las abscisas en el mismo diámetro;» i con referencia á un diámetro cualquiera se sabrá si un punto (x, y) está fuera de la curva, en ella ó dentro de ella, segun fuere $y^2 - 2p'x$ una cantidad positiva, nula ó negativa.

La ecuacion jeneral de la tanjente en un punto (x', y') será ... $yy' = p'(x + x')$; en donde $y = 0$ da ... $x = -x'$, i «la subtanjente dupla de la abscisa del punto de contacto.»

Por ser esta abscisa $x = -x'$ independiente del signo de y', se reconoce «que las tanjentes tiradas en las estremidades de una cuerda se cortan en el diámetro de la misma cuerda.»

La ecuacion de la cuerda de contacto de dos tanjentes concurrentes en un punto cualquiera (α, β) es ... $\beta y' = p'(\alpha + x')$, siendo x', y' coordenadas jenerales de la recta. La condicion $y' = 0$ da $x' = -\alpha$, distancia del oríjen en el diámetro al punto en que le corta la cuerda: i por ser independiente de β revela el mismo teorema importante deducido para la elipse i la hipérbola, i que puede jeneralizarse así para las tres curvas.—«Si varios ángulos circunscritos á una curva del 2.° grado tienen sus vértices en una misma recta, las cuerdas respectivas de contacto se cortarán todas en un punto del diámetro bisector de las cuerdas paralelas á dicha recta.» El recíproco es este—«Si en una curva del 2.° grado se tiran varias cuerdas que pasen por un mismo punto, los pares de tanjentes por las estremidades de cada cuerda concurrirán todos en una recta paralela á la tanjente tirada en el estremo del diámetro que pasa por dicho punto.» Se advertirá desde luego que la situacion del punto no está sujeta á condicion alguna; de manera que puede hallarse dentro ó fuera de la respectiva curva, en las cuerdas mismas ó en sus prolongaciones.

Brevemente se demuestran estos teoremas jenerales partiendo de la ecuacion ... $y^2 = 2px + qx^2$ comun á las tres curvas, i que representa hipérbola, elipse, ó parábola, segun fuere q positiva, negativa ó nula.

La ecuacion jeneral de la tanjente sacada de esta ecuacion es ... $y'(y - y') = (p + qx')(x - x')$.

O bien, supuesto que $-y'^2 = -2px' - qx'^2$; ... $yy' = p(x + x') + qxx'$.

La cuerda de contacto de dos tanjentes concurrentes en un punto (α, β) tiene por ecuacion .... $\beta y' = p(\alpha + x') + q\alpha x'$; i de $y' = 0$ sale ... $x' = -\dfrac{p\alpha}{p + q\alpha}$; valor independiente de β que prueba la verdad de ambos teoremas. Cuando $q = 0$, resulta para la parábola $x' = -\alpha$, como ántes.

Ecuacion polar de la paràbola—Tomando por eje polar el eje OX de la curva (Fig. 107), i por polo el foco F, i contàndose las coordenadas angulares positivas sobre FO, para un punto m serán $r = Fm$, $\varphi = \acute{a}ng.\ Fmd$ las coordenadas polares.

El radio vector tiene por valor en las coordenadas rectangulares; $Fm = x + \frac{1}{2}p$; hai que poner el valor de x en funcion de r i de φ.

$$x = Op = OF + Fp = \tfrac{1}{2}p + Fm\ cos.\ mFp = \tfrac{1}{2}p + r \times -cos.\ mFd = \tfrac{1}{2}p - r\ cos.\ \varphi.$$

Sustituyendo se obtiene; $r = \frac{1}{2}p - r\ cos.\ \varphi + \frac{1}{2}p$; ó bien $r = \dfrac{p}{1 + cos.\ \varphi}$ (1). Ecuacion buscada.

Es la misma ecuacion de la elipse i la hipérbola ... $r = \frac{p}{1 + e\ cos.\ \varphi}$; siendo $e < 1$ para la elipse, $e > 1$ para la hipérbola, i $e = 1$ para la parábola.

Se llegará directamente á esta ecuacion polar comun de las tres curvas, buscando como en la Leccion 23, pero con referencia à coordenadas polares, «el lugar jeométrico de los puntos cuyas distancias á un punto fijo F i á una recta dada cd estén en cierta relacion constante e.»

Situado el polo en F, tomando por eje polar la Fd perpendicular sobre cd, i haciendo $Fd = d$, que es magnitud conocida, si se supone que m es uno de los puntos i se tiran mc, mp perpendiculares sobre cd i dF prolongada, se obtiene;

$\frac{Fm}{mc} = e$; $Fm = r$; $mc = dF + Fp = d - r\ cos.\ \varphi$; siendo Fd el semieje polar positivo.

La sustitucion da; ... $\frac{r}{d - r\ cos.\ \varphi} = e$; de donde ... $r = \frac{de}{1 + e\ cos.\ \varphi} = \frac{p}{1 + e\ cos.\ \varphi}$

Se ha hecho $de = p$ para abreviar. Si $Fm < mc$, $e < 1$, i la ecuacion representa elipse; si $Fm > mc$, $e > 1$, i representa hipérbola; i si $Fm = mc$, $e = 1$, $d = p$, i representa parábola.

Cuadratura de la paràbola —Por ser tambien la paràbola curva abierta infinita, en ella solo puede ser determinable el área de segmentos limitados por rectas. Va á buscarse el área del segmento comprendido entre el arco parabólico aOb (Fig. 108) i la cuerda ab.

Haciendo pasar por el punto medio e de ab el diàmetro eO, la tanjente Od en su estremo serà paralela á ab. Tírense ad, bc, paralelas á eO, i se formará el paralelógramo $abcd$.

Sean ejes coordenados las rectas Oe, Od, i $2p$ el parámetro del diámetro Oe: la ecuacion de la curva referida á estos ejes es ... $y^2 = 2px$ ... (A).

Considerado solamente por ahora el segmento ó sector Oea, tómense en el arco Oa una serie de puntos n, n', n'' &c, que pueden suponerse tan próximos como se quiera, i tírense sus coordenadas np, nq, $n'p'$, $n'q'$ &c: prolongándolas hasta las inmediatas, se formaràn en el segmento interior aOe del paralelógramo $Oead$ una serie de paralelógramos np', $n'p''$ &c correspondientes uno á uno con los nq', $n'q''$ &c de otra serie formada en el segmento esterior aOd. I si son x, y, x', y', x'', y'' &c las coordenadas de n, n', n'' &c, i $àng.\ YOX = \theta$, se obtendrá para las áreas de los paralelógramos correspondientes;

$np' = y\,(x' - x)\,sen\,\theta$; $nq' = x\,(y' - y)\,sen\,\theta$; .. $n'p'' = y'\,(x'' - x')\,sen\,\theta$; $n'q'' = x'\,(y'' - y')\,sen\,\theta$; .. &c.

Las relaciones entre estas áreas son; .. $\frac{np'}{nq'} = \frac{y(x' - x)}{x(y' - y)}$; $\frac{n'p''}{n'q''} = \frac{y'\,(x'' - x')}{x'\,(y'' - y')}$; $\frac{n''p'''}{n''q'''} = \frac{y''\,(x''' - x'')}{x''(y''' - y'')}$; &c.

O reemplazando x, x' &c por sus valores $\frac{y^2}{2p}$, $\frac{y'^2}{2p}$ &c sacados de la ecuacion (A);

$\frac{np'}{nq'} = \frac{y\,(y'^2 - y^2)}{y^2\,(y' - y)} = \frac{y + y'}{y} = 1 + \frac{y'}{y}$; ... $\frac{n'p''}{n'q''} = 1 + \frac{y''}{y'}$; ... $\frac{n''p'''}{n''q'''} = 1 + \frac{y'''}{y''}$; ... &c.

Como es arbitraria la posicion de los puntos n, n', n'' &c, se les puede suponer situados de manera que sean iguales las relaciones ... $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y''}$ &c; i estas relaciones pueden ser representadas por $1 + k$, supuesto que son quebrados impropios por cuanto $y' > y$, $y'' > y'$ &c.

Viene de aquí; ... $\frac{np'}{nq'} = 2 + k$; $\frac{n'p''}{n'q''} = 2 + k$; &c .. i tambien; $\frac{np' + n'p'' + n''p''' + \ldots = S}{nq' + n'q'' + n''q''' + \ldots = s} = 2 + k$ .. (B)

Acercándose los puntos, la diferencia entre las ordenadas de los inmediatos disminuye; es decir, las relaciones $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y'}$ &c se acercan á la unidad, i el residuo k disminuye acercándose á *cero*. Al mismo tiempo, la suma S de los paralelògramos interiores se acerca al área del segmento aOe, i la suma s de los esteriores se acerca al área del segmento aOd.

En el límite, esto es, cuando los puntos n, n', n'' &c están infinitamente próximos i forman en conti-

nuidad la curva misma, es $k = 0$; i en (B) ... $\frac{S}{s} = \frac{\text{área } aOe}{\text{área } aOd} = 2$; ó $aOe = 2aOd$.

I pues que las dos àreas reunidas forman la del paralelógramo $Oead$, es $aOd = \frac{2}{3} Oead$.

De idéntico modo se demostraria que $bOe = \frac{2}{3} Oebc$; i por tanto ... $aObe = \frac{2}{3} abcd$.

Resultado — « El área del segmento parabólico, comprendido entre una cuerda i un arco, equivale á los dos tercios del paralelógramo construido sobre esta cuerda i la tanjente paralela.»

De las curvas del 2.° grado, la parábola es por lo visto la única cuadrable. Tal propiedad no es sino una de las muchas notables que caracterizan á esta importante curva.

SECCION 17.—Nociones complementarias.

Dado un arco de una curva del 2.° grado, para determinar su especie se tirarán dos diámetros. Si estos converjen ácia la concavidad del arco, la curva es elipse; si converjen ácia la convexidad, es hipérbola; i si resultan paralelos, es parábola. Si los diámetros converjentes ácia la concavidad del arco resultan perpendiculares á sus respectivas cuerdas, sin ser las del un sistema perpendiculares à las del otro, la curva es círculo. La verdad de estas deducciones es notoria, supuesto que los diámetros converjen ácia el centro de la curva.

Semejanza de curvas.—Consideradas las curvas como polígonos de infinito número de lados, son aplicables á las semejantes de una misma especie todos los principios jeométricos de semejanza de las figuras rectilíneas. Dos curvas semejantes admitirán sistemas de triángulos semejantes i semejantemente colocados; tendrán puntos i líneas homólogas, siendo estas proporcionales; i las áreas de sus segmentos ó espacios cualesquiera semejantes seràn proporcionales con los cuadrados de las líneas homólogas. Son semejantes todos los círculos, pues que todas sus líneas homólogas son proporcionales con los radios: lo son todas las parábolas, por la proporcionalidad con los paràmetros: i dos elipses ó hipérbolas lo serán siendo proporcionales sus ejes, ó dos diámetros conjugados cualesquiera igualmente inclinados.

Se reconoce que son semejantes dos curvas AB, (P), ab (Q), (Fig. 109), si para cualquier punto C arbitrario en (P), del cual se tiran los radios vectores CN, CN', CN'' &c, hai en (Q) otro punto c tal que, tirando de él radios vectores cn, cn', cn'' &c con iguales ángulos i en la conveniente direccion, resultan proporcionales los *homólogos*: esto es; ... $CN : cn :: CN' : cn'$ &c. Serán puntos homólogos N i n &c; *centros homólogos de semejanza* C i c; i $\frac{CN}{cn} = \frac{CN'}{cn'}$ &c *la relacion de semejanza*. Si los radios homólogos resultan ademas paralelos, ó coinciden, las curvas se hallan tambien *semejantemente situadas*, como en la figura 110.

Si tomando en (P) otro punto C' se tiran las $C'C$, $C'N$, i luego en (Q) se construye sobre cn un triángulo cnc' semejante al CNC', es claro que C', c' serán otro par de centros homòlogos de semejanza.

Cuando dos curvas semejantes AB, ab (Fig. 110), están semejantemente situadas, es notorio que en el punto O de concurso de las rectas que pasan por los estremos de cualesquiera dos radios homólogos concurren igualmente las que pasan por los estremos de cualesquiera otros dos; i O es centro único comun de semejanza de las dos curvas, en la posicion que tienen. Si esta varía, sin dejar de ser semejante, el centro comun varía tambien: i puede darse á las curvas una posicion semejante tal, que venga á ser centro comun de semejanza cualquier punto O determinado; bastando para ello situar dos radios homólogos CN, cn en posicion paralela, i de manera que las rectas que pasan por sus estremos concurran en O.

Tomando al centro comun de semejanza O por oríjen de las coordenadas para cualesquiera ejes OX, OY, las coordenadas Op, Oq (x, x'), Np, nq (y, y') de dos puntos homólogos tienen la misma relacion de semejanza que los radios homólogos. Por tanto, si $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k$, relacion de semejanza de las curvas, puede pasarse de la ecuacion de la una curva á la de la otra cambiando x en kx, y en ky. De aquí pudiera deducirse la regla de procedimiento para examinar si dos curvas dadas por sus ecuaciones son semejantes i están semejantemente situadas.

LECCION 34.

Secciones cônicas.

SECCION 18.—Secciones cónicas i cilíndricas.

Una recta que, fija en un punto, se mueve recorriendo el contorno de una curva, enjendra con este movimiento una *superficie cónica*, ó sea un cono. El punto fijo es su *vértice*, la recta movible la *jeneratriz*; i á la curva que guia el movimiento de la recta, i de cuya forma i posicion depende la forma de la superficie cónica, se la llama *directriz*. Considerando á la recta jeneratriz indefinida en todos sentidos, el cono ó superficie cònica se compone de dos partes ú *hojas* tambien indefinidas, unidas la una á la otra en el vértice, i simétricas con respecto á él.

Trátase de averiguar la naturaleza de las líneas llamadas *secciones cónicas*, resultantes de la interseccion de un plano con una superficie cónica de base ó directriz circular; i para mas jeneralidad se supondrá oblicuo el cono, es decir, que su *eje*, que es la recta que une el vértice con el centro del círculo de la base, es oblicuo al plano de esta. Puede el plano secante cortar á todas las jeneratrices, esto es, á la jeneratriz primitiva en todas sus posiciones sucesivas é infinitamente próximas, dando en consecuencia por seccion una continuidad de puntos que forman una curva cerrada; ó ser paralelo á dos jeneratrices, ó paralelo á una sola, dando curvas abiertas: en los casos 1.° i 3.° cortará á una hoja del cono solamente, porque si las cortase á ambas podria concebirse por el vértice otro plano paralelo al secante, cuya interseccion con el cono serian dos jeneratrices, paralelas al plano secante, lo cual es contra el supuesto; i en el 2.° caso cortará à ambas hojas.

Caso 1.°—Sea *rq* (Fig. 111) la *traza* ó interseccion del plano secante en el plano de la base del cono, i *emd* la seccion: tírese en la base un diámetro *ab* perpendicular á *rq*, i concíbase por él i por las jeneratrices *Va*, *Vb*, otro plano que cortará al primero en una recta *eu*, i que pasará por el eje pues que pasa por el centro *c* i por el vértice *V*. Haciendo ahora pasar por un punto cualquiera *m* de la seccion un tercer plano paralelo á la base, este cortarà al cono en un círculo *mgnh*, al plano *aVb* por el eje en el diâmetro *gh* paralelo á *ab*, i al primer plano en la recta *mn*, cuerda comun à ambas curvas i dividida por mitad en *p*.

El ángulo *gpm*, de lados paralelos al *aur*, es recto, i en ese círculo se tiene; $\ldots \overline{mp}^2 = pg \times ph \ldots$ (A)

Triángs. *epg* i *dph* $\left\{ pg : ep :: sen.peg : sen.(egp = Vab); \ldots ph : pd :: sen.pdh : sen.phd = sen.Vba. \right.$

De aquí sale; $\ldots pg = ep \times \frac{sen.peg}{sen.Vab} = ep \times B$; $\ldots ph = pd \times \frac{sen.pdh}{sen.Vba} = pd \times B'$

Cualquiera que fuere la posicion del punto *m*, la cuerda *mn* es paralela à *rq* i està bisectada por *ed*, que en consecuencia es diámetro de la seccion *mend*; i las dos relaciones $B = \frac{sen.peg}{sen.Vab}$, $B' = \frac{sen.pdh}{sen.Vba}$, no varían.

Sustituyendo en (A); $\ldots \overline{mp}^2 = ep \times pd \times BB'$; de donde $\ldots \frac{\overline{mp}^2}{ep \times pd} = BB'$; cantidad constante.

Este resultado manifiesta ser la seccion una curva cerrada en que «los cuadrados de las semicuerdas paralelas son proporcionales con los segmentos del respectivo diámetro;» es decir, una *elipse* (Leccion 26), cualquiera que sea la inclinacion del plano secante con respecto al de la base i al de la seccion *aVb* por el eje. Si el plano secante se moviese paralelamente á sí mismo, alejàndose del vértice ó acercándosele, todas las secciones serian elipses semejantes, por la proporcionalidad de sus líneas homólogas: al pasar por el vértice, la seccion se reduciria á *un punto*; i alejado infinitamente de él, seria la seccion una elipse *imajinaria*: son las variedades de la curva. (Leccion 19.)

La cuerda mn, perpendicular á *gh*, no lo es á *ed* ó *eu* sino siéndolo su paralela *rq*, i entònces el plano *aVb* de la seccion por el eje es perpendicular al de la base, i tambien al de la elipse *mend*; en cuyo caso la seccion triangular *aVb* por el eje se llama *seccion principal*. Si en la misma hipótesis fuese $BB' = 1$, i por tanto $\overline{mp}^2 = ep \times pd$, la curva *mend* seria otro círculo, no paralelo á la base: veamos qué otra condicion se requiere para que esto suceda.

$BB'=1 \}\ \overline{mp}^2=ep\times pd$; $..\overline{mp}^2=pg\times ph$; de donde $..ep\times pd=pg\times ph$; i $..ep:pg::ph:pd$.

Entonces son semejantes los dos triángulos peg, phd; los ángulos en g i d son iguales; i son tambien semejantes los tres triángulos eVd, gVh, aVb, que es la 2.ª condicion hallada. Resulta pues; «que si un plano perpendicular á la seccion principal la corta formando el triángulo parcial semejante con el total, sin ser paralelas sus bases, la seccion cónica hecha por el mismo plano es un círculo.» Esta seccion circular es denominada *anti-paralela*, ó *subcontraria*.

Caso 2.º—La figura 112 manifiesta la posicion diversa del plano secante, cortando á las dos hojas del cono. Su traza en el plano de la base es rq. Se han hecho construcciones iguales á las del caso anterior, poniendo en los mismos lugares las mismas letras. La curva $mgnh$ es un círculo paralelo á la base; gh un diámetro; i el ángulo $mpg=rua$ es recto.

En el círculo $mgnh$ se tiene; . . . $\overline{mp}^2=pg\times ph$ . . (B).

Triángulos dph, epg $\}\ pg:pe::sen.peg:sen.(egp=Vab)$; $..ph:pd::sen.pdh:sen.(phd=Vba)$

$$pg=pe\times\frac{sen.\ peg}{sen.\ Vab}=pe\times B;\ ph=pd\times\frac{sen.\ pdh}{sen.\ Vba}=pd\times B';\ ..\overline{mp}^2=pe\times pd\times BB'\ ..(B')$$

Como ántes, sea cual fuere la posicion del punto m, mas arriba ó mas abajo, la cuerda mn comun á las dos curvas es paralela á rq i está bisectada por la recta deu, que resulta ser diámetro de la seccion; i los factores B i B' no varian.

De (B′) sale . . $\dfrac{\overline{mp}^2}{pe\times pd}=BB'$, valor constante. Segun esto, la seccion cónica es «una curva de dos ramas abiertas infinitas é independientes, en que los cuadrados de las semi-cuerdas paralelas son proporcionales con los productos de los segmentos del respectivo diámetro contados desde su pie hasta las intersecciones con la curva;» propiedad característica de la *hipérbola*. (Leccion 29).

Si el plano secante se moviese paralelamente á sí mismo, todas las secciones diversas serian hipérbolas semejantes; i si en una de sus posiciones pasase por el vértice, se reduciria la seccion á *dos rectas* allí concurrentes, las mismas dos jeneratrices primitivamente paralelas al plano secante: es la variedad conocida de esta curva.

Caso 3.º—Siendo el plano secante paralelo á una sola jeneratriz Vb (Fig. 113), su traza rq en la base es perpendicular al diámetro ab, i este la divide por mitad en u; puesto que si por Vb pasase otro plano, paralelo al secante, seria tanjente al cono, i su traza bt tanjente al círculo de la base, paralela á rq i perpendicular à ab. Tirando por cualquier punto m de la seccion req un plano paralelo á la base, dará un círculo $mgnh$: la gh, i la eu paralela á Vb, son intersecciones de los planos de las dos curvas con el de la seccion por el eje, i diámetros de las mismas, i mn es la cuerda comun, dividida por mitad en p.

En el círculo $mgnh$, por ser $àng.\ mpg=\frac{1}{2}\pi$, se tiene; . . $\overline{mp}^2=pg\times ph$ . . . (C).

En el triángulo epg; . . $pg:pe::sen.(peg=bVa):sen.(pge=Vab)$.

Sale $pg=pe\times\dfrac{sen.\ bVa}{sen.\ Vab}=pe\times B$; siendo $B=\dfrac{sen.\ bVa}{sen.\ Vab}$ constante para toda posicion de m.

La sustitucion en (C) da; . . $\overline{mp}^2=pe\times B\times ph$; . . $\dfrac{\overline{mp}^2}{pe}=B\times ph$ . . . (C′)

A virtud del paralelismo de eu i Vb, es $ph=ub$ una cantidad constante; i lo es $B\times ph$.

Espresa pues (C′) que la seccion cónica es una *parábola* (Leccion 33); en razon à que en esta curva req «los cuadrados de las ordenadas de un diámetro son proporcionales con las respectivas abscisas.» Situado el plano secante en la posicion paralela Vbt, la parábola se reduce á *la recta* Vb; i si continuara moviéndose paralelamente en el mismo sentido, la parábola reapareceria en sentido inverso en la hoja superior, como debia ser segun lo dicho al principio de la Leccion 31, supuesto que el parámetro mudó de signo pasando por *cero*, i en consecuencia mudó tambien de signo la abscisa.

Aparece de todo lo antedicho que las líneas llamadas *secciones cónicas* son las mismas tres curvas del 2.º grado ya conocidas.

Va à buscarse ahora su ecuacion directamente, suponiendo (Fig. 114) hechas las mismas construcciones de la figura 111.

Los ejes coordenados en el plano secante, ó de la seccion, serán; *eu* de las x, i de las y la recta eY paralela á *mn* i á *rq*. Para el punto *m* es $x = ep$, $y = mp$.

La posicion del plano secante, i por consiguiente la naturaleza de la seccion, dependen del ángulo *Ved* i de la distancia *Ve*, ó de la *ek* paralela á *ab* i *gh*. Sean *àng.* $aVb = \alpha$, $Ved = \mathfrak{E}$, $Vab = \gamma$; i $ek = 2r$: i téngase en cuenta que el ángulo γ es de valor diverso para cada seccion por el eje, siendo sus valores mínimo i máximo los de los ángulos à la base de la seccion principal.

El círculo *mgnh* da; . . . $\overline{mp}^2 = y^2 = pg \times ph$ . . (D). Deben hallarse los valores de estos dos factores en funcion de los datos i de las coordenadas jenerales de la seccion cónica.

En el triángulo *peg*; . . $pg : pe = x :: sen.\ peg = sen\ \mathfrak{E} : sen.\ (pge = \gamma)$; . . $pg = \dfrac{x\ sen.\ \mathfrak{E}}{sen.\ \gamma}$.

Tirando *ps* paralela á *hk*, es $ph = ek - es = 2r - es$.

Triáng. *eps* } $es : ep = x :: sen\ (eps = edV) = sen\ (\alpha + \mathfrak{E}) : sen\ (esp = ekd) = sen\ (\alpha + \gamma)$; . . $es = \dfrac{x\ sen(\alpha + \mathfrak{E})}{sen\ (\alpha + \gamma)}$

Por tanto . . . $ph = 2r - \dfrac{x\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E})}{sen\ (\alpha + \gamma)}$. I en (D); . . $y^2 = \dfrac{x\ sen\ \mathfrak{E}}{sen\ \gamma}\left(2r - \dfrac{x\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E})}{sen\ (\alpha + \gamma)}\right)$

O bien; . . $y^2 = \dfrac{2r\ sen\ \mathfrak{E}}{sen\ \gamma}x - \dfrac{sen\ \mathfrak{E}\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E})}{sen\ \gamma\ sen\ (\alpha + \gamma)}x^2$ . . . (D'). Es *la ecuacion jeneral de las secciones cónicas*; la misma ecuacion $y^2 = 2px + qx^2$ ya conocida (Leccion 21) de las tres curvas del 2.° grado.

Representa (D') *elipse* si el término en x^2 es negativo, *hipérbola* si es positivo, *paràbola* si es nulo, dependiendo todo del signo del quebrado que le sirve de coeficiente: i como el denominador es siempre positivo, por valer menos de dos rectos los àngulos γ i $\alpha + \gamma$, i *sen.* $\mathfrak{E}$ es tambien positivo, la naturaleza de la seccion depende del signo del factor *sen* $(\alpha + \mathfrak{E})$.

1;° . . $\alpha + \mathfrak{E} < \pi\ (2\ rectos)$. } $sen.\ (\alpha + \mathfrak{E}) > 0$. Quebrado positivo; término en x^2 negativo; *elipse*. En efecto, converje *ed* con *Vb*: es el caso 1.° de arriba, figura 111.

2;° . . $\alpha + \mathfrak{E} > \pi$ } $sen.\ (\alpha + \mathfrak{E}) < 0$. Quebrado negativo; término en x^2 positivo: *hipèrbola*. Las rectas *ed* i *Vb* son diverjentes: es el caso 2,° figura 112.

3;° . . $\alpha + \mathfrak{E} = \pi$ } $sen\ (\alpha + \mathfrak{E}) = 0$. Quebrado *cero*; término en x^2 nulo; *paràbola*. Las rectas *ed* i *Vb* son paralelas: es el caso 3,° figura 113.

Careciendo de término en xy la ecuacion (D'), representarà *circulo* si se verifican dos condiciones, á saber; que sean rectangulares los ejes coordenados, i que los términos en y^2 i en x^2 tengan coeficientes iguales i de contrario signo. Por la 1.ª condicion es *rq* perpendicular á *eu*, i el plano secante perpendicular á la seccion principal.

La 2.ª condicion da; . . $\dfrac{sen\ \mathfrak{E}\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E})}{sen\ \gamma\ sen\ (\alpha + \gamma)} = 1$; ó bien . . $sen\ \mathfrak{E}\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E}) = sen\ \gamma\ sen\ (\alpha + \gamma)$ . . (E)

Se aplicará á los dos miembros de la ecuacion (E) esta sencilla fórmula trigonométrica;

$$2\ sen.\ a\ sen.\ b = cos\ (a - b) - cos\ (a + b)$$

Resulta; . . $2\ sen\ \mathfrak{E}\ sen\ (\alpha + \mathfrak{E}) = cos\ (-\alpha) - cos\ (\alpha + 2\mathfrak{E}) = cos\ \alpha - cos\ (\alpha + 2\mathfrak{E})$

$$2\ sen\ \gamma\ sen\ (\alpha + \gamma) = cos\ (-\alpha) - cos\ (\alpha + 2\gamma) = cos\ \alpha - cos\ (\alpha + 2\gamma)$$

I por consiguiente; . . $cos\ \alpha - cos\ (\alpha + 2\mathfrak{E}) = cos\ \alpha - cos\ (\alpha + 2\gamma)$; . . $cos\ (\alpha + 2\mathfrak{E}) = cos\ (\alpha + 2\gamma)$

Pueden ser iguales estos cosenos por igualdad de los arcos; . . $\alpha + 2\mathfrak{E} = \alpha + 2\gamma$; . . $\mathfrak{E} = \gamma$. Seccion paralela.

Pueden serlo tambien porque la suma ó la diferencia de los arcos da un nùmero esacto de circunferencias; i siendo la diferencia $2\ (\mathfrak{E} - \gamma) < 2\pi$, es forzosamente la suma $2\ (\alpha + \mathfrak{E} + \gamma) = 2\pi$; una sola circunferencia, sin poder alcanzar á mas.

Es decir; . . $\alpha + \mathfrak{E} + \gamma = \pi$; . . $\gamma = \pi - (\alpha + \mathfrak{E})$; *àng.* $Vab = Vde$. Seccion anti-paralela.

Son resultados conformes con los obtenidos en el análisis del caso 1.°

Si el plano secante se mueve paralelamente à sí mismo, no alteran α, $\mathfrak{E}$, γ, ni (D'), i por tanto las secciones son curvas semejantes.

Para el cono recto, la seccion por el eje es siempre seccion principal, i el triángulo *aVb* isósceles. Designando en este caso al ángulo *aVb* por 2α en vez de α, es $\gamma = \frac{1}{2}\pi - \alpha$; i en (D') . . . . .

$$y^2 = \frac{2r\,sen\,\mathfrak{C}}{cos\,\alpha}\,x - \frac{sen\,\mathfrak{C}\,sen\,(2\alpha+\mathfrak{C})}{cos^2\,\alpha}\,x^2 \ldots, (D'').$$

No hai en el cono recto seccion circular anti-paralela; pues la 2.ª suposicion de arriba .... $2(2\alpha+\mathfrak{C}+\gamma)=2\pi$, da... $2(\frac{1}{2}\pi-\gamma)+\mathfrak{C}+\gamma=\pi$; .. $\mathfrak{C}=\gamma$, lo mismo que la 1.ª

Concibiendo que el plano secante jira sobre eY como eje de rotacion, creciendo $\mathfrak{C}$ crece el diàmetro ed, i cuando $\alpha+\mathfrak{C}=\pi$, $ed=\infty$ i la elipse se ha convertido en parábola. Si fuese aVb la seccion principal, el diámetro ed seria eje mayor de la elipse: al convertirse esta en parábola, el vértice d se habria alejado hasta el infinito; i este vértice reapareceria al lado opuesto, cambiando por consiguiente de signo, cuando la seccion pasaba á ser hipérbola por cuanto $\alpha+\mathfrak{C}>\pi$.

LECCION 35.

Secciones cilíndricas — Raices de las ecuaciones.

Secciones cilíndricas. —El movimiento de una recta, paralelamente á sí misma, recorriendo el contorno de una curva, enjendra la superficie cilíndrica, ó sea el cilindro; que viene á ser un cono cuyo vértice se halla situado en el infinito, i en que es nulo el ángulo del vértice.

Si en la ecuacion jeneral (D') de las secciones cónicas (Leccion anterior) se hace $\alpha=0$, el cono á que ella se referia se convierte en un cilindro oblicuo de base circular, cuyo radio es r, i la ecuacion de las secciones cilíndricas será; ... $y^2=\frac{2\,r\,sen\,\mathfrak{C}}{sen\,\gamma}\,x-\frac{sen^2\,\mathfrak{C}}{sen^2\,\gamma}\,x^2$ ... (1).

Representa (1) solamente *elipses*, por cuanto el término en x^2 es esencialmente negativo; i porque no puede ser nulo uno de los términos en x sin serlo tambien el otro, pues que en tal caso es $sen\,\mathfrak{C}=0$: en este caso, la ecuacion representaria el eje de las abscisas, que seria la jeneratriz de contacto del plano secante, convertido en tanjente; i si pasase de esta posicion á otra paralela, cortando al cilindro, la seccion serian dos jeneratrices, es decir, dos rectas paralelas; variedades ambas de la parábola, como elipse infinita.

Podria obtenerse directamente la ecuacion (1), haciendo para el cilindro (Fig. 115) las mismas construcciones hechas para el cono; i siendo *áng.* $edk=\mathfrak{C}$, *àng.* $eab=\gamma$, i $ab=ek=2r$ un diámetro del círculo de la base, perpendicular á la traza rq del plano secante.

Si rq, paralela á la cuerda mn, fuese perpendicular á eu, el plano $eabk$ por el eje seria perpendicular á la base, dando la *seccion principal*; i al plano de esta seria tambien perpendicular el plano secante eun. Si ademas la direccion de eu fuese tal, que resultase isósceles el triángulo peg, siendo $pe=pg$, resultaria al mismo tiempo isósceles el triángulo phd, i $pd=ph$: i como la seccion paralela $mgnh$ da $\overline{mp}^2=pg\times ph$, se tendria igualmente $\overline{mp}^2=pe\times pd$, siendo mp perpendicular comun á gh i ed. Es pues en semejante caso la seccion *mend* un círculo igual al de la base, sin serle paralelo, i *àng.* $edk=eab$, ó $\mathfrak{C}=\gamma$.

Lo mismo da la ecuacion (1), haciendo $\frac{sen^2\,\mathfrak{C}}{sen^2\,\gamma}=1$, de donde $sen\,\mathfrak{C}=sen\,\gamma$; condicion que se satisface siendo $\mathfrak{C}$ i γ ángulos iguales ó suplementarios. Sabido es ademas, que en el cilindro dan secciones iguales los planos igualmente inclinados sobre el plano perpendicular á las jeneratrices.

Siendo $eabk$ la seccion principal, el mínimo valor de γ seria el del ángulo eab de esta seccion, i bz perpendicular sobre ea seria la mínima cuerda del cilindro que cortase al eje, lugar de los centros de todas las secciones elípticas. El valor de $bz=2r\,sen.\,\gamma$ representa pues el mínimo eje menor de las elipses resultantes de la interseccion de un cilindro oblicuo con un plano. Si fuese recto el cilindro, se confundirian bz i ba, ò seria $bz=2r$ para toda seccion por el eje; de manera que, «todas las secciones elípticas hechas en un cilindro recto tienen por eje menor el diámetro del mismo cilindro.»

Igual resultado se obtiene haciendo $\gamma=\frac{1}{2}\pi$ en (1); lo cual da por ecuacion jeneral de la seccion para

el cilindro recto ... $y^2 = 2rx\ sen\ \varepsilon - x^2\ sen^2\ \varepsilon$ ... (1'). Entónces ed es eje mayor de la elipse $mend$, el triángulo ekd es rectángulo en k, i $ek = ed\ sen\ edk$; ó bien ... $2r = 2a\ sen\ \varepsilon$, haciendo $ed = 2a$. Sale de aquí ... $sen\ \varepsilon = \frac{r}{a}$; i la sustitucion en (1') da ... $y^2 = \frac{r^2}{a^2}(2ax - x^2)$, ecuacion de una elipse ((4) Leccion 22) referida al vértice i al eje mayor $2a$, i cuyo eje menor es $2r$.

SECCION 19.—Raices de las ecuaciones.

Los principios i métodos jenerales de la teoría de las curvas, espuestos ya i practicados suficientemente, proporcionan ampliar las reglas de construccion de los valores analíticos obtenidos por resultado de una cuestion jeométrica, para cuando estos valores sean las raices de una ecuacion de grado superior al 2.°

Así como la eliminacion de y entre dos ecuaciones indeterminadas, $F(x,y) = 0, f(x,y) = 0$, que representan dos líneas, conduce á una ecuacion determinada $\varphi(x) = 0$ cuyas raices son las abscisas de los puntos de interseccion de dichas líneas, puede recíprocamente buscarse los valores de las raices de una ecuacion determinada $\varphi(x) = 0$, en magnitudes lineares, considerando á esta ecuacion como resultante de la eliminacion de y entre dos ecuaciones en x, y, i construyendo las respectivas líneas para obtener las abscisas de sus puntos de interseccion.

De varios modos pueden obtenerse dos ecuaciones $F(x,y) = 0$, $f(x,y) = 0$, que den cierta ecuacion propuesta $\varphi(x) = 0$ por resultado de la eliminacion de y. Se emplearán líneas de determinada especie, prefiriendo las de trazado mas sencillo; las cuales, ó podrán desde luego particularizarse, ó entrarán con coeficientes indeterminados determinables en seguida por la condicion de identidad de la ecuacion final en x con la ecuacion propuesta.

Sirva de ejemplo la ecuacion del 2.° grado $x^2 + px + q = 0$, cuyas raices ya se han construido (Leccion 2.ª) por procedimientos puramente jeométricos. A poco esfuerzo se advierte que esas mismas raices son en magnitudes lineares las abscisas de los puntos de interseccion de una línea recta con una curva del 2.° grado, cuyas ecuaciones den por final en x la ecuacion propuesta.

Suponiendo ejes rectangulares, pudiera emplearse la recta $y = 0$, que es el eje de las abscisas, combinada con la parábola $y = x^2 + px + q$; ó con el círculo $y^2 + x^2 + px + q = 0$; ó con la hipérbola equilátera $y^2 = x^2 + px + q$. La combinacion con el círculo reproduce la construccion de la figura 11; siendo As el eje de las x, AC la abscisa $-\frac{1}{2}p$ del centro del círculo, i Ar, As, las abscisas de las dos intersecciones, raices de la ecuacion propuesta.

Tambien pudiera emplearse una recta cualquiera determinada .... $x = ay$, combinada con la parábola ... $a^2y^2 + px + q = 0$, ó con otras dos rectas ... $a^2y^2 + pay + q = 0$, paralelas al eje de las x; i escojiendo la recta $x = y$, bisectriz del ángulo de los ejes, las otras ecuaciones serian ... $y^2 + px + q = 0$, $y^2 + py + q = 0$, i el procedimiento mas sencillo.

Determinando una parábola cualquiera, $x^2 = ky$, se la combinaria con la recta $ky + px + q = 0$.

Sea ahora la ecuacion completa del 3.r grado ... $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

Pueden construirse sus raices combinando una parábola determinada, $x^2 = ky$, con una hipérbola ... $kxy + px^2 + qx + r = 0$; ó con esta otra ... $kxy + pky + qx + r = 0$, cuyas asíntotas son paralelas á los ejes.

Para la del 4.° grado ... $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, tomando una parábola, $x^2 = ky$, si se la combinase con ... $k^2y^2 + pkxy + qx^2 + rx + s = 0$ resultante de la sustitucion en solo los dos primeros términos del valor dado á x^2, esta última ecuacion representaria elipse, hipérbola ó parábola, segun fuese $p^2 - 4q$ cantidad negativa, positiva ó nula. Si la sustitucion de ky por x^2 se estendiese á los tres primeros términos de la ecuacion propuesta, el 3.° seria entónces qky, i la respectiva curva una hipérbola.

Supuesto que toda ecuacion puede ser privada del 2.° término (*), no omitiremos considerar de esta manera á las del 3.° i 4.° grado.

(*) Dada una ecuacion cualquiera, puede pasarse á otra del mismo grado relacionada con ella, i privada del 2.° término.

Sea la ecuacion $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + U = 0$; i hágase $x = z + d$.

Resulta ... $z^m + (md + A)z^{m-1} + Pz^{m-2} + Qz^{m-3} + \ldots + U' = 0$; en que d es indeterminada.

Sea la del 4.° grado ... $x^4 + mx^2 + nx + u = 0$. Sus raices pudieran determinarse combinando una parábola $x^2 = ky$ con otra parábola $k^2y^2 + mky + nx + u = 0$; i si se tomase $k = \sqrt{m}$, de donde $m = k^2$, la combinacion se haria con un círculo $k^2y^2 + k^2x^2 + nx + u = 0$, i seria mas sencilla.

Entre una parábola i un círculo, $x^2 = ky$, $(x - \alpha)^2 + (y - \mathfrak{E})^2 = R^2$, curvas indeterminadas ambas, la eliminacion de y dará; ... $x^4 + k(k - 2\mathfrak{E})x^2 - 2\alpha k^2 x + (\alpha^2 + \mathfrak{E}^2 - R^2)k^2 = 0$ ... (a).

Serán idénticas (a) i la propuesta, poniendo ... $k(k - 2\mathfrak{E}) = m$; ... $2\alpha k^2 = -n$; $(\alpha^2 + \mathfrak{E}^2 - R^2)k^2 = u$ (d).

Estas tres ecuaciones de condicion contienen cuatro indeterminadas, α, $\mathfrak{E}$, R, k: se sacarán los valores de las tres primeras en funcion de k, i se asignará á k el valor arbitrario conveniente para obtener soluciones reales.

La ecuacion del 3.^{r} grado, privada del 2.° término, puede entrar como caso particular en la del 4°, haciendo $u = 0$. Queda ... $x^4 + mx^2 + nx = 0$, ó bien ... $x^3 + mx + n = 0$, i la ecuacion (d) de condicion da ... $R^2 = \alpha^2 + \mathfrak{E}^2$; espresando que el círculo pasa entónces por el oríjen de las coordenadas, vértice de la parábola, i siendo la abscisa correspondiente á este punto la raiz nula que se suprimió.

Nótese; que las líneas empleadas en cualquier caso para construir las raices de una ecuacion no podrán dar mas puntos de interseccion que raices reales haya. Si hai raices iguales, las curvas se tocarán.

Cualquiera ecuacion, $f(x) = 0$, admite la combinacion $y = 0$, $y = f(x)$; i esta última curva será en jeneral de la forma *ab* que indica la figura 116, cortando al eje OX de las abscisas en tantos puntos r, s, t, u &c como raices reales tenga $f(x) = 0$. Suponiéndola construida, ò discutiéndola con respecto á sus intersecciones, puntos de contacto, límites &c, se encontrarian de nuevo todos los principios establecidos en la teoría jeneral de las ecuaciones para la determinacion aproximativa de las raices reales de las ecuaciones numéricas.

Tomando, por ejemplo, dos abscisas Op, Op', que dan ordenadas mp i $m'p'$, ó mp i $m''p'$, de signos contrarios, es decir, que dan $f(x) > 0$ para la una i $f(x) < 0$ para la otra, se ve que para pasar la curva del punto m al m' ó del m al m'', corta al eje de las x en un punto r, ó en tres puntos r, s, t, habiendo por lo mismo una abscisa, ó tres, ú otro número ímpar, que dan $y = 0$, i $f(x) = 0$, i cuyos valores son por consiguiente *raices de la ecuacion*. Se deduce pues; «que cuando son de signos contrarios los resultados de las sustituciones sucesivas de dos números por x en una ecuacion $f(x) = 0$, hai un número ímpar de raices reales, una por lo menos, comprendidas entre esos dos números.»

Se ve tambien, considerando dos abscisas Op, Oq, que dan ordenadas mp i nq, ó mp i $n'q$, ambas positivas ó negativas; «que entre dos números que sustituidos por x dan resultados de igual signo, hai número par de raices reales, ó ninguna.»

Por estos métodos de construccion pueden resolverse gráficamente varios problemas, insolubles por la jeometría elemental. Sirvan de ejemplo los que siguen.

1.° – Intercalar dos medias proporcionales jeométricas, x, y, entre dos números ó magnitudes lineares a i b.

Se tiene inmediatamente; ... $a : x :: x : y :: y : b$; de donde ... $x^2 = ay$ .. (b); .. $y^2 = bx$ .. (c).

Son (b) i (c) dos parábolas, de vértice comun en el oríjen, i cuyos ejes son los ejes coordenados. Tendrán otro punto comun, ó de interseccion, cuyas coordenadas son las dos medias proporcionales buscadas.

2.° – Dividir un arco en tres partes iguales.

La cuestion puede siempre referirse á un arco agudo, aun cuando el propuesto sea mayor que un cuadrante, pues en tal caso se tomará su mitad, su cuarta parte &c hasta obtener el arco agudo, al cual se aplique la forma trigonométrica; ... $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

Designando por a el coseno conocido del arco propuesto, i por x el de su 3.ª parte, se tendrá; ...

Para determinar d por la condicion de desaparecer el 2.° término, se hará $md + A = 0$.

Sale $d = -\frac{A}{m}$; «el cociente de la division del coeficiente del 2.° término de la propuesta, tomado con signo contrario, por el esponente del grado de la misma ecuacion.»

Haciendo pues $x = z - \frac{A}{m}$, la ecuacion en z no tendrá 2.° término; i halladas sus raices, son conocidas tambien las de la ecuacion en x.

$a = 4x^3 - 3x$; ó bien ... $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}a = 0$; ecuacion cuyas raices son todas reales, una positiva i dos negativas, siendo la positiva la que satisface á la cuestion.

Multiplicándola por x, i sumándola luego con la ecuacion $x^2 - y = 0$ de una parábola, se obtiene;... $x^4 + x^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}ax - y = 0$; ó bien ... $y^2 + x^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}ax - y = 0$.

Se combinarán pues la parábola $x^2 = y$ i el círculo $y^2 + x^2 - \frac{7}{4}y - \frac{1}{4}ax = 0$ que pasa por el oríjen, vértice de la parábola. Habrá tres puntos mas de interseccion, con dos abscisas negativas i una positiva que es el coseno de la 3.ª parte del arco.

3.º – Dado un cubo a^3, hallar el lado x del cubo duplo.

La ecuacion de la cuestion es; ... $x^3 = 2a^3$; ó bien .. $x^4 = 2a^3x$.

Queda resuelta por la interseccion de dos parábolas; ... $x^2 = ay$; .. $y^2 = 2ax$.

Es el problema 1,º siendo a i $2a$ los números entre los cuales han de intercalarse los dos medios jeométricos.

Sumadas las ecuaciones de las dos parábolas dan ... $y^2 + x^2 - ay - 2ax = 0$; ecuacion de un círculo que puede combinarse con cualquiera de las parábolas para hallar gráficamente el valor buscado de x.

FIN DE LA PARTE PRIMERA.

LECCION 36.

Sistema coordenado del espacio.

PARTE 2.ª

SECCION 1.ª—Representacion de los puntos, líneas i superficies en el espacio.

Por medio de ecuaciones, i con relacion á un sistema adecuado de coordenadas, puede representarse la posicion de uno ó mas puntos en el espacio, i la forma i posicion de una línea ó de una superficie, siempre que estas admitan definicion rigorosa. Como en el plano, las ecuaciones de las líneas ó superficies espresan la relacion constante entre las coordenadas de cualquiera de sus puntos.

Dadas de magnitud i posicion las distancias de un punto del espacio á tres planos que se cortan en un punto, la situacion de aquel queda notoriamente determinada, como punto de concurso de otros tres planos paralelos á los primeros, á las distancias i en el sentido de los respectivos datos; pues que cada uno de estos tres planos paralelos viene á ser lugar jeométrico del punto propuesto.

Elejidos por planos coordenados ó *de proyeccion* (Fig. 117) tres planos MN, PQ, RS, que de dos en dos se cortan en las rectas XX', YY', ZZ', i que concurren en un punto O, las coordenadas de un punto n son sus distancias $np'=z$, $np''=y$, $np'''=x$ á dichos tres planos, «contadas paralelamente á sus tres intersecciones» ZZ' (eje de las z), YY' (eje de las y), i XX' (eje de las x). Si se conciben por n tres planos paralelos á los de proyeccion, formarán los seis el paralelepípedo representado en la figura, cuyas doce aristas son iguales i paralelas de cuatro en cuatro; i las coordenadas del punto, contadas en los ejes, serán $x=Oa$, $y=Ob$, $z=Oc$.

XOY, plano de las xy; XOZ, plano de las xz; YOZ, plano de las yz; O, el oríjen.

Llámanse *proyecciones* del punto n los pies p', p'', p''' de sus coordenadas; *ortogonales* si los planos coordenados ó de proyeccion son perpendiculares entre sí, i por consiguiente *àng*. $YOX=XOZ=YOZ=\frac{1}{2}\pi$; i si nó, proyecciones *oblicuas*.

Las ecuaciones de un punto en el espacio son pues; $\ldots x=a$, $y=b$, $z=c$ $\ldots$ (1): i se le designará así; el punto (a, b, c).

Pero como los tres planos de proyeccion, considerándolos indefinidos en todos sentidos, forman ocho ángulos triedros, las coordenadas deben indicar por medio de sus signos en cual de estos ángulos se halla situado el punto; i para ello se considera cada eje dividido por el oríjen en dos semiejes, uno positivo i otro negativo, i que el ángulo $OXYZ$ es el de las coordenadas positivas. Así tienen negativa la x los puntos situados á la izquierda del plano RS; la y los situados detras del PQ; i la z los situados debajo del MN.

Por ejemplo; las ecuaciones $x=-a$, $y=b$, $z=-c$, pertenecen á un punto situado en el ángulo triedro $OYX'Z'$.

Siendo nulo el valor de una de las coordenadas, el punto se encuentra en el plano de las otras dos. Punto en el plano de las xy; $\ldots x=a$, $y=b$, $z=0$.

Siendo nulos los valores de dos coordenadas, está el punto en el eje de la otra. Punto en el eje de las z; $\ldots x=0$, $y=0$, $z=c$.

Las ecuaciones $\ldots x=0$, $y=0$, $z=0$, representan el punto de oríjen.

Conocidas dos proyecciones cualesquiera, p', p'', del punto n, quedan determinados el punto i su 3.ª proyeccion p''', pues que se puede construir el paralelepípedo. Esto se confirma observando que como las ecuaciones de p' en el plano YOX son $x=a$, $y=b$, i las de p'' en el plano ZOX son $x=a$, $z=c$, dadas estas cuatro ecuaciones están dadas las tres del punto n, i las dos del p''' en el plano YOZ.

Una sola de las ecuaciones (1) representa *un plano* paralelo al plano de las otras dos coordenadas. Así $x=a$, espresando aislada la sola condicion de distancia al plano de las yz, conviene á todos los puntos situados á esa distancia a, en la direccion de las x, que son los de un plano paralelo al YOZ. La ecuacion $f(x)=0$ representaria tantos planos paralelos al YOZ como raices reales tuviese.

Cada una de las ecuaciones $x=0$, $y=0$, $z=0$, representa aislada uno de los planos de proyeccion; el de las otras dos coordenadas. Plano de las xz; $\ldots y=0$.

Dos ecuaciones solas de las (1), representan *una recta* paralela al eje de la coordenada que falta. Así $x=a$, $y=b$, formando sistema, son la interseccion de un plano paralelo al YOZ con otro paralelo al XOZ; que es una paralela al eje de las z. Siendo $y=0$, la recta se hallaria en el plano de las xz; siendo $x=0$, se hallaria en el plano de las yz; i siendo á un tiempo $x=0$, $y=0$, la recta seria el eje mismo de las z.

Eje de las x; ... $y=0$, $z=0$. Eje de las y; ... $x=0$, $z=0$. Eje de las z; ... $x=0$, $y=0$.

Considéranse ahora las ecuaciones con dos ó mas variables.

Sea esta; ... $f(x,y)=0$. Cualquiera de sus soluciones reales, como vgr. $x=a$, $y=b$, espresa segun lo acabado de ver una recta paralela al eje OZ; de manera que la ecuacion representa, entre los límites de sus soluciones reales como ecuacion indeterminada, un conjunto de rectas que forman una *superficie cilíndrica* paralela á dicho eje OZ. La misma ecuacion dada, $f(x,y)=0$, representa en el plano YOX una línea, que será la base, interseccion ó *traza* del cilindro en el mismo plano.

Resulta de aquí; que si $f(x,y)=0$ fuese ecuacion del primer grado, la superficie seria un plano paralelo al eje de las z, por cuanto su traza en el plano de las XY era una línea recta. Así pues, en la jeometría del espacio, «una ecuacion de primer grado entre dos variables representa un plano paralelo al eje de la otra coordenada.»

$f(x,y)=0$, $f(x,z)=0$, $f(y,z)=0$ } Superficies cilíndricas, respectivamente paralelas á los ejes OZ, OY, OX.

$Ax+By+C=0$, $Ax+Bz+C=0$, $Ay+Bz+C=0$ } Planos paralelos, respectivamente, á los ejes OZ, OY, OX.

Dos ecuaciones, $f(x,y)=0$, $f'(x,z)=0$ entre las tres variables, formando sistema, representan la interseccion de dos cilindros paralelos á dos de los ejes coordenados, i por consiguiente *una línea* situada en el espacio, i de la cual son *cilindros proyectantes*, el 1.° sobre el plano de las xy i el 2.° sobre el plano de las xz. Cada una de las mismas ecuaciones representa en los mismos dos planos de proyeccion las *trazas* de los cilindros, que son las *proyecciones* de la línea del espacio: i si entre ellas se eliminase x, se obtendria la ecuacion $f''(y,z)=0$, del cilindro proyectante de dicha línea sobre el plano YOZ, i de su 3.ª proyeccion en el mismo plano. Si $f(x,y)=0$, $f'(x,z)=0$, fuesen ecuaciones de primer grado entre las respectivas variables, la línea del espacio seria interseccion de dos planos, i por consiguiente una línea recta. «Queda determinada una línea, dándose dos de sus proyecciones.»

Tres ecuaciones, $f(x,y)=0$, $f'(x,z)=0$, $f''(y,z)=0$, formando sistema, i tales que ninguna de ellas fuese emanacion de las otras dos, representarian la interseccion de tres cilindros paralelos á los tres ejes, que consistiria en determinado número de *puntos* de interseccion de tres líneas del espacio.

Sea ahora . . . $F(x,y,z,)=0$; una sola ecuacion entre las tres variables.

Dando en ella á z un valor c, se la limita á los puntos del espacio situados en un plano paralelo al YOX á la distancia c; i $f(x,y,c)=0$ representa entonces una línea situada en ese plano paralelo, é interseccion del mismo con un cilindro paralelo á OZ, que la proyecta igual en el plano de las xy. Si se consideran para z una serie de valores c', c'', &c, crecientes ó decrecientes por diferencias infinitamente pequeñas, resultan una serie de líneas planas paralelas todas al plano YOX, cuyo conjunto forma *una superficie* que tiene por ecuacion la $F(x,y,z)=0$ propuesta.

Dos ecuaciones de esta especie representan la interseccion de dos superficies, que es *una línea*; i tres la interseccion de tres superficies, ó determinado número de *puntos*, si ninguna de ellas emana de las otras dos.

Hace ver la precedente discusion que toda ecuacion aislada, de una, dos ó tres variables, representa siempre *superficie*; que dos representan *línea*, i tres representan *punto* ó puntos. Solo para el caso particular de aplicarlas á uno de los planos de proyeccion, ó á sus paralelos, podràn representar líneas las ecuaciones aisladas de una ó dos variables, i puntos la combinacion de dos.

Consideradas las líneas en el espacio, i como polígonos de lados infinitamente pequeños, se llaman *curvas de doble curvatura* aquellas en que tres cualesquiera de estos lados consecutivos no están en un mismo plano; diferenciándoselas así de las *curvas planas*. En jeneral, la interseccion de dos superficies curvas es una curva de doble curvatura, esceptuada la de dos esferas.

Clasifícanse las superficies por sus ecuaciones, como las líneas, en *aljébricas* i *trascendentes*.

Si en la ecuacion $F(x,y,z)=0$ de una superficie se hace *cero* una de las variables, se obtiene su

interseccion ó *traza* en el plano de las otras dos; i si se hacen *cero* á un tiempo dos variables, se obtiene la interseccion con el eje de la otra coordenada. La traza en el plano de las xy, por ejemplo, estará representada por $z = 0$, $F(x, y, 0) = 0$.

Es notorio que si en la ecuacion de una superficie no existe término independiente de las variables, la superficie pasa por el oríjen, pues que la ecuacion queda satisfecha asignando el valor *cero* á todas las variables.

Cuestion 1.ª—Dados dos puntos, $m(x', y', z')$, i $n(x'', y'', z'')$, determinar en funcion de sus coordenadas las del punto intermedio d. (Fig. 118.)

Tirando mp, nq, paralelas á OZ, i siendo pq la proyeccion de mn en el plano YOX, en el trapecio $mnpq$ es para d; . . $z = dr = \frac{1}{2}(mp + nq)$; ò bien . . $z = \frac{1}{2}(z' + z'')$

I pues que la x i la y del punto d son las mismas del punto r, su proyeccion, se tiene igualmente (Leccion 4.ª); . . $x = \frac{1}{2}(x' + x'')$; . . $y = \frac{1}{2}(y' + y'')$.

Cuestion 2.ª—Hallar la espresion de la distancia $mn = \delta$ entre dos puntos, $m(x', y', z')$, i $n(x'', y'', z'')$.

1.º—Para ejes rectangulares (Fig. 118). Tirando ne paralela á qp, el triàngulo rectángulo men da; . . $\overline{mn}^2 = \overline{me}^2 + \overline{ne}^2 = (z' - z'')^2 + \overline{pq}^2$.

I como $\overline{pq}^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$ (Leccion 4.ª); será . . $\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$ . . (2)

Confundiéndose el punto n con el oríjen, seria mn la diagonal del paralelepípedo rectángulo coordenado, i $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$; i se tendria . . $\delta^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. . . (3).

2.º—Para ejes oblicuos. Sea en primer lugar el caso de confundirse el punto n con el oríjen O (Fig. 119).

Construido el paralelepípedo coordenado del punto m, i tiradas las dos diagonales $Om = \delta$, $cp'' = d$, se tiene; . . $\overline{Om}^2 + \overline{cp''}^2 = 2\overline{Oc}^2 + 2\overline{Op'}^2$; ó bien . . . $\delta^2 + d^2 = 2z'^2 + 2\overline{Op'}^2$

Triáng. Oap' } . . $\overline{Op'}^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos XOY$; i . . $\delta^2 + d^2 = 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 4x'y' \cos XOY$ (m)

Paralelóg. $Oamp'''$ } $\delta^2 + (\overline{ap'''}^2 = d'^2) = 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 4y'z' \cos YOZ$ . . (n). Triáng. Obp'''.

Paralelóg. $acp'p''$ } . . $d^2 + d'^2 = 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 4x'z' \cos XOZ$ . . (p). Triáng. Oac.

Para eliminar d i d', se sumará (m) con (n) i se restará (p).

Queda, simplificando; . . $\delta^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos XOY + 2x'z' \cos XOZ + 2y'z' \cos YOZ$ . . (4)

Sea ahora el caso jeneral, de no coincidir el punto n con el oríjen.

Concibiendo por n otros tres planos, paralelos á los de proyeccion, formarian con los que pasasen por m otro paralelepípedo, cuyas aristas serian paralelas á los ejes, é inclinadas entre sí lo mismo que los ejes, i tendrian por magnitudes . . . $x' - x''$, $y' - y''$, $z' - z''$; valores que sustituidos en (4) por las anteriores aristas x', y', z', dan;

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos XOY + 2(x' - x'')(z' - z'')\cos XOZ + 2(y' - y'')(z' - z'')\cos YOZ \ldots (5).$$

Espresan pues las fórmulas (3) i (4) la distancia de un punto al oríjen, i las (2) i (5) la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio. Entrarán en ellas las coordenadas con los signos que les correspondan.

Coordenadas polares. —Considerando un plano fijo RS [Fig. 120], i situados en él el polo O i el eje polar OX, las coordenadas polares de un punto m del espacio serán; el radio vector $Om = r$, distancia del punto al polo; el ángulo $mOp = \theta$ que forma el radio vector con su proyeccion ortogonal Op; i el ángulo $XOp = \varphi$ de esta proyeccion con el eje polar.

Un punto m estará pues representado por las tres ecuaciones $r = a$; $\theta = A$, valor angular; i $\varphi = B$, valor tambien angular. El radio vector no será negativo sino en contraposicion á otro directamente opuesto. El signo del ángulo θ indicará si el punto se halla encima ó debajo del plano RS; i el del ángulo φ si está delante ó detras del plano perpendicular al RS que pasa por OX.

La ecuacion $r = a$ representa aislada una *superficie esférica* cuyo centro es el polo, i cuyo radio es a.

La . . $\theta = A$, un *cono recto* de base circular, con el vértice en el polo; cuyo eje es perpendicular al plano fijo, i cuyas jeneratrices forman todas con el mismo plano el ángulo A.

La . . $\varphi = B$, un *plano* perpendicular al plano fijo, que pasa por el polo, i cuya traza Op forma con el eje polar el ángulo B.

Combinadas de dos en dos, representarán $r = a$, $\theta = A$ un *círculo* paralelo al plano fijo; $r = a$, $\varphi = B$ otro *círculo*, perpendicular á dicho plano; i $\theta = A$, $\varphi = B$, *dos rectas* que se cortan en el polo.

Las ecuaciones $f(r, \theta) = 0$, $f'(r, \varphi) = 0$, representan aisladas conjuntos *superficiales* de círculos paralelos ó perpendiculares al plano *RS*, estos con centro comun en el polo, i aquellos con centro en la perpendicular al mismo plano en el polo; i la $f(\theta, \varphi) = 0$, una *superficie cónica*, conjunto de rectas concurrentes en el polo. Tomadas de dos en dos espresan la *línea* de interseccion de dos superficies.

Una ecuacion $F(r, \theta, \varphi) = 0$, representa tambien en jeneral una *superficie*. Dando en ella á φ valores diversos, se hallarian sus líneas de interseccion con diversos planos perpendiculares al plano fijo, i que pasaban por el polo.

Segun lo cual en el sistema polar, lo mismo que en el rectilíneo, la ecuacion aislada con una, dos ó tres variables representa *superficie*; dos representan *línea*; i tres *punto* ó puntos determinados.

LECCION 37.

De la línea recta i el plano.

SECCION 2.ª—De la línea recta i el plano.

Dos ecuaciones, ... $x = mz + g$, $y = nz + h$, ... (1) determinan la posicion de una recta en el espacio, como interseccion de dos de sus *planos proyectantes*. Son las ecuaciones de los planos mismos, paralelos á los ejes *OY*, *OX*, i de las proyecciones de la recta en los planos *XZ*, *YZ*; i eliminada entre ellas z, se obtiene la otra proyeccion ... $n(x - g) = m(y - h)$ en el plano *XY*.

Las intersecciones ó *trazas* de la recta en los tres planos de proyeccion se encuentran haciendo sucesivamente $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en sus ecuaciones. En el plano de las xy es el punto $(x = g, y = h)$. Se reconocerá desde luego que las tres intersecciones no pueden hallarse en un mismo ángulo triedro, sino cuando la recta corta á alguno de los ejes.

Contienen las ecuaciones jenerales cuatro constantes, m, n, g, h, que se determinarán segun la posicion que quiera asignarse á la recta.

Para cualquier recta que pase por el oríjen es $g = 0$, $h = 0$; i ... $x = mz$, $y = nz$ ... (2).

Si se quiere que pase ademas por un punto (x', y', z'), será $m = \frac{x'}{z'}$, $n = \frac{y'}{z'}$; i .. $x = \frac{x'}{z'} z$, $y = \frac{y'}{z'} z$.. (3).

Procediendo por los mismos métodos de la Parte 1.ª se hallarán las ecuaciones;

1.º – De todas las rectas que pasan por un punto (x', y', z'); .. $x - x' = m(z - z')$; $y - y' = n(z - z')$.. (4); quedando indeterminadas m i n.

2.º – De la que pasa por dos puntos (x', y', z'), (x'', y'', z''); ...

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'); \ \ldots \ y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \ \ldots \ (5).$$

Dos rectas $(x = mz + g, y = nz + h)$, $(x = m'z + g', y = n'z + h')$, que se cortan en el espacio, tienen por coordenadas del punto de interseccion; .. $z = \frac{g' - g}{m - m'} = \frac{h' - h}{n - n'}$; $x = \frac{mg' - m'g}{m - m'}$; $y = \frac{nh' - n'h}{n - n'}$.. (6).

La 1.ª de estas tres fórmulas, ó mas bien el doble valor que ella asigna para z, es la *ecuacion de condicion* que da el análisis para que las dos rectas se corten; porque en jeneral dos rectas en el espacio se cruzan sin cortarse.

Sale de los valores (6) la condicion de paralelismo ... $m = m'$, $n = n'$ que los hace infinitos; la cual es de evidente verdad, pues que si dos rectas son paralelas en el espacio, lo son tambien sus respectivos planos proyectantes i las trazas de estos, que son las proyecciones de las mismas dos rectas.

Dadas las ecuaciones de una recta, se hallan las de otra recta paralela que pase por determinado punto (x', y', z'); ... $x - x' = m(z - z')$; $y - y' = n(z - z')$ .. (7). Aquí m i n son determinadas: son los coeficientes de z en las ecuaciones propuestas.

El àngulo de dos rectas que se cruzan en el espacio sin cortarse se mide por el que forma una de ellas con una paralela á la otra, tirada por cualquiera de sus puntos. Va á buscarse;

1.° – Los ángulos $\alpha, \mathcal{E}, \gamma$, que una recta forma con los ejes rectangulares OX, OY, OZ.

Se le tirará una paralela $(x = mz,\ y = nz)$ por el oríjen; i séalo OA (Fig. 121).

Tomando un punto $m(x', y', z')$ en OA, se tiene; ... $x' = mz'$; $y' = nz'$; $Om = \delta = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}$.

$Oa = x'$ es proyeccion ortogonal de Om sobre OX; es decir, áng. $Oam = \frac{1}{2}\pi$. Tambien son y', z', sus proyecciones sobre OY, OZ; i por tanto ... $\cos\alpha = \frac{x'}{\delta}$; $\cos\mathcal{E} = \frac{y'}{\delta}$; $\cos\gamma = \frac{z'}{\delta}$

Poniendo mz' por x', nz' por y' en los valores de δ i de estos cosenos, resulta;

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 1)}};\ \cos\mathcal{E} = \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 1)}};\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 1)}} \ldots (8).$$

Nótese: que á estos cosenos, de los ángulos de la recta con los semiejes positivos, les corresponde en el denominador el signo $\pm$; i que hai por consiguiente dos series de valores, porque con cada semieje forma la recta dos ángulos, suplementarios uno de otro. La 1.ª serie, con el signo +, da positivo el coseno de γ: lo cual quiere decir, que el ángulo con el semieje OZ sobre el plano XY es siempre agudo.

De las fórmulas (8), viene; ... $\cos^2\alpha + \cos^2\mathcal{E} + \cos^2\gamma = 1$ ... (9); relacion notable, que manifiesta no poderse designar arbitrariamente los tres ángulos, i que aun para la designacion de dos de ellos exije que la suma de sus cosenos cuadrados no alcance á la unidad. Es la correspondiente á los ángulos que la diagonal de un paralelepípedo rectángulo forma con las tres aristas.

2.° – El ángulo θ de dos rectas, $(x = mz + g,\ y = nz + h)$, $(x = m'z + g',\ y = n'z + h')$; suponiendo tambien rectangulares los ejes.

Tírenseles las paralelas $(x = mz,\ y = nz)$, $(x = m'z,\ y = n'z)$ por el oríjen, i sean OA, OB: i tomando en ellas dos puntos, el $A(x', y', z')$, i el $B(x'', y'', z'')$, se obtiene segun la trigonometría; ...

$$\cos(AOB = \theta) = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2\,OA \times OB}$$

Es decir; ... $\cos\theta = \dfrac{(x'^2 + y'^2 + z'^2) + (x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x' - x'')^2 - (y' - y'')^2 - (z' - z'')^2}{2\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)}}$

O bien; ... $\cos\theta = \dfrac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}\sqrt{(x''^2 + y''^2 + z''^2)}}$

I como $x' = mz'$, $y' = nz'$, $x'' = m'z''$, $y'' = n'z''$, sustituyendo queda; ....

$$\cos\theta = \frac{mm' + nn' + 1}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 1)}\sqrt{(m'^2 + n'^2 + 1)}} \ldots (10).$$

Este valor (10) es en funcion de las constantes m, n, m', n'. Para tenerlo en funcion de los ángulos $\alpha, \mathcal{E}, \gamma, \alpha', \mathcal{E}', \gamma'$, de las rectas con los ejes, se las reemplazará por sus valores sacados de las fórmulas (8), i resultará; ... $\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\mathcal{E}\cos\mathcal{E}' + \cos\gamma\cos\gamma'$ ... (11).

Condicion de perpendicularidad; $mm' + nn' + 1 = 0$; ó .. $\cos\alpha\ \cos\alpha' + \cos\mathcal{E}\cos\mathcal{E}' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$ .. (12).

De las fórmulas (10) i (11) pueden sacarse las de *sen.* θ i de *tanj.* θ. En la (10) los signos iguales de los radicales corresponden al un ángulo de las rectas, i los desiguales al suplementario.

La ecuacion jeneral de todas las rectas tiradas por un punto (x', y', z') en direccion perpendicular á la recta $(x = mz + g,\ y = nz + h)$, se hallará combinando las ecuaciones (4) de las rectas sujetas á pasar por el punto, con la condicion de perpendicularidad $mm' + nn' + 1 = 0$. Resulta ..... $m(x - x') + n(y - y') + z - z' = 0$ ... (13); que pues representa el lugar jeométrico de todas esas perpendiculares, es la ecuacion de *un plano*.

El valor de la perpendicular que corta á la recta propuesta, ó «de la distancia del punto á la recta,» puede hallarse como en la Parte 1.ª introduciendo la condicion de interseccion de la 1.ª fórmula (6), i es; ...

$$P=\frac{\sqrt{((x'-mz'-g)^2+(y'-nz'-h)^2+(n(x'-g)-m(y'-h))^2)}}{\sqrt{(m^2+n^2+1)}}\ldots(14).$$

Merece atencion la estructura del numerador, análoga á la de las fórmulas (T) i (T'), Leccion 8.ª «Los tres paréntesis contienen las ecuaciones de las tres proyecciones de la recta reducidas al primer miembro, i reemplazadas sus coordenadas jenerales por las del punto.»

La ecuacion jeneral del 1.r *grado* entre las tres variables, .. $Ax+By+Cz+D=0$ ... (15), representa un plano. Puede esto demostrarse dando una serie de valores á una de las variables, que producen una serie de rectas paralelas al plano de las otras dos, i situadas en una superficie que da líneas rectas por trazas, lo cual manifiesta ser dicha superficie un plano. La misma ecuacion resulta ademas, buscando directamente de cualquier manera la de un plano, como se ve en (13): se la obtendria, por ejemplo, considerándolo enjendrado por una recta que se mueve paralelamente á sí misma apoyándose en otra recta; ó como lugar jeométrico de todos los puntos equidistantes de dos puntos dados.

Faltando en (15) uno de los términos afectos de las variables, el plano es paralelo á uno de los ejes; i coincide con él si tambien falta el término independiente. Faltando dos términos de las variables, es paralelo á uno de los planos de proyeccion. La ecuacion de primer grado, con una, dos ó tres variables, siempre representa un plano.

Combinando sucesivamente la ecuacion (15) con una de estas tres, $x=0$, $y=0$, $z=0$, se obtienen las tres líneas rectas $(x=0, By+Cz+D=0)$, $(y=0, Ax+Cz+D=0)$, i $(z=0, Ax+By+D=0)$, trazas del plano en los tres de proyeccion, las cuales se cortan de dos en dos en los puntos de interseccion del plano con los tres ejes. Buscando estos tres puntos, i llamando a, b, c sus distancias x, y, z al oríjen, la ecuacion puede recibir esta forma; ... $bcx+acy+abz=abc$ ... (16).

Tiene la ecuacion (15) cuatro indeterminadas A, B, C, D, que se reducen á tres dividiendo por una de ellas: en cada caso se las determinará en todo ú en parte por las condiciones de la posicion que se asigne al plano. Propongámonos ahora buscar;

1.° – La ecuacion comun á todos los planos que pasan por un punto (x', y', z').

Es notoriamente; ... $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$ ... (17); siendo A, B i C indeterminadas.

2.° – La ecuacion del plano determinado por tres puntos.

Hai tres ecuaciones, $Ax'+By'+Cz'+D=0$, $Ax''+By''+Cz''+D=0$, $Ax'''+By'''+Cz'''+D=0$, que darán A, B i C en funcion de D; i esta constante desaparecerá al sustituir en (15).

3.° – El punto de interseccion de una recta i un plano. Para sus coordenadas da la eliminacion estos valores jenerales; .. $x=\frac{B(ng-mh)+Cg-mD}{Am+Bn+C}$; $y=\frac{A(mh-ng)+Ch-nD}{Am+Bn+C}$; $z=-\frac{Ag+Bh+D}{Am+Bn+C}$

De aquí resulta por condicion de paralelismo de la recta i el plano; ... $Am+Bn+C=0$ ... (A).

I por condiciones para existir la recta en el plano esa misma con esta otra; .. $Ag+Bh+D=0$ .. (B); porque reunidas dan $z=\frac{0}{0}$, i tambien de consiguiente $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$. Esto se confirmará, si se quiere, sacando de (A) i (B) los valores de C i D, i sustituyéndolos en los de x é y.

4.° – La ecuacion comun á todos los planos que contienen á una recta dada; lo cual equivale á la condicion de pasar por dos puntos. Sacados de (A) i (B) los valores de C i D, é introducidos en la ecuacion jeneral (15), sale la buscada, que es; ... $A(x-mz-g)+B(y-nz-h)=0$ ... (18).

Se ve, por los paréntesis, que satisfacen á ella las coordenadas de la recta. A i B son indeterminadas.

5.° – La del plano que pasa ademas por un punto (x', y', z') — Sustituyendo en (18) x', y', z' por x, y, z, sacando el valor de A i llevándolo á (18), desaparece B i la ecuacion es; ....

$$(y'-nz'-h)(x-mz-g)-(x'-mz'-g)(y-nz-h)=0\ldots(19).$$

Para el plano que pase por el eje OX, i por un punto (x', y', z'), las dos ecuaciones ... $By+Cz=0$, $By'+Cz'=0$, dan; ... $z'y-y'z=0$; i semejantemente para los ejes OY, OZ ... $z'x-x'z=0$; $y'x-x'y=0$ ... (19'). Cada una de estas tres ecuaciones representa tambien la traza del respectivo plano en el plano de los otros dos ejes, i una proyeccion de la comun interseccion de los tres planos, que es la recta que pasa por el oríjen i por el punto dado.

6.° – La del plano que pasando por la recta $(x=mz+g, y=nz+h)$, es paralelo á otra recta $(x=m'z+g', y=n'z+h')$.

Las condiciones $Am+Bn+C=0$, $Am'+Bn'+C=0$ dan combinadas; .. $A(m'-m)+B(n'-n)=0$.

Sacado aquí el valor de A, i sustituido en (18), sale; ....

$$(n'-n)(x-mz-g)-(m'-m)(y-nz-h)=0 \ldots (20).$$

La ecuacion es la misma, cortándose las dos rectas en el espacio.

7.° – La del plano determinado por dos rectas paralelas; en que por el paralelismo es $m=m'$, $n=n'$.

Se hará pasar el plano por la 1.ª recta, i por un punto de la otra; que elijiendo el punto $(x=g', y=h')$ de su traza en el plano XY, resulta; .. $(h'-h)(x-mz-g)-(g'-g)(y-nz-h)=0$ .. (21).

8.° – Las ecuaciones de dos planos paralelos. Notoriamente dan trazas paralelas en los tres planos de proyeccion; i por tanto sus ecuaciones solo se diferenciarán en el término independiente, simplificadas que sean. Si fuesen paralelas las trazas en dos planos de proyeccion solamente, los planos se cortarian en una recta paralela á la interseccion de los de proyeccion en que sus trazas eran paralelas.

Planos paralelos; ... $Ax+By+Cz+D=0$; ... $Ax+By+Cz+D'=0$.

Si el 2.° ha de pasar por determinado punto (x', y', z'), será su ecuacion;

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0 \ldots (22).$$

9.° – La ecuacion de un plano perpendicular á la recta $(x=mz+g, y=nz+h)$.

Considerando ejes rectangulares, se advierte que las proyecciones de la recta deben ser perpendiculares á las trazas del plano, por cuanto los planos proyectantes de la recta son entonces perpendiculares á un tiempo al plano propuesto i á los de proyeccion: i en consecuencia, siendo $Ax+Cz+D=0$, i $By+Cz+D=0$, trazas del plano buscado, se ha de tener $m=\frac{A}{C}$, $n=\frac{B}{C}$, por la condicion de perpendicularidad; ó bien ... $A=mC$, $B=nC$.

El plano perpendicular es pues en jeneral; ... $mCx+nCy+Cz+D=0$.

O bien, dividiendo por C; ... $mx+ny+z+k=0$ ... (23). La única indeterminada es k.

I si pasa por determinado punto (x', y', z'); ... $m(x-x')+n(y-y')+z-z'=0$ ... (24).

Es la misma ecuacion (13), antes obtenida directamente.

Si se diese el plano, para tirar la perpendicular por el punto, en las ecuaciones (4) de las rectas que pasan por (x', y', z') se haria $m=\frac{A}{C}$, $n=\frac{B}{C}$, que es la condicion de perpendicularidad.

Resultan por ecuaciones de la perpendicular; .. $C(x-x')=A(z-z')$; .. $C(y-y')=B(z-z')$ .. (25).

Magnitud de la perpendicular, ó distancia del punto al plano; .. $P=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ .. (26).

Este valor se encuentra determinando el pie de la perpendicular, i aplicando luego la fórmula (2) de la Leccion precedente; i se le deduciria tambien de la fórmula (14), poniendo en los tres parentesis del numerador las tres proyecciones de la recta que pasa por el punto (x', y', z'), i dando á m, n los valores que les corresponden.

LECCION 38.

De la línea recta i el plano—Trasformacion de coordenadas.

Otras cuestiones importantes quedan todavía por resolver.

10. Hallar el ángulo que forma la recta $(x=mz+g, y=nz+h)$ con el plano .... $Ax+By+Cz+D=0$. Se continúa haciendo referencia á ejes rectangulares.

Es el ángulo agudo de la recta con su proyeccion ortogonal sobre el mismo plano; complementario del que ella forma con una perpendicular bajada al plano desde cualquiera de sus puntos. Si fuesen, por

ejemplo, (Fig. 120), *RS* el plano, *Om* la recta, i *Op* su proyeccion, el ángulo buscado seria el *mOp*, complementario del *Omp*.

Las ecuaciones de la perpendicular son (Leccion 37); . . $x = \frac{A}{C} z + g'$; $y = \frac{B}{C} z + h'$.

El coseno del ángulo que ella forma con la recta propuesta es el seno del de esta recta con el plano. Llamándolo V, i reemplazando en la fórmula (10) de la misma Leccion m' por $\frac{A}{C}$, n' por $\frac{B}{C}$, resulta; ..

$$sen\ V = \frac{Am + Bn + C}{\sqrt{(m^2+n^2+1)}\ \sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} \ldots (27).$$

Si la recta dada fuese paralela al plano, seria $sen\ V = 0$, $Am + Bn + C = 0$; que es la condicion (A) de paralelismo antes deducida.

11.—Hallar el ángulo de dos planos, $(Ax + By + Cz + D = 0)$, i $(A'x + B'y + C'z + D' = 0)$

Son dos de un mismo lado, suplementarios uno de otro, i respectivamente iguales á otros dos que se forman del lado opuesto. Sus cosenos solo se diferencian en el signo.

Tírense del oríjen dos *normales* (perpendiculares) á los planos propuestos: el ángulo que ellas forman es la medida de uno de esos dos, i suplemento del otro.

Sus ecuaciones son; . . $x = \frac{A}{C} z, y = \frac{B}{C} z$; . . . $x = \frac{A'}{C'} z, y = \frac{B'}{C'} z$.

El ángulo que forman lo da la citada fórmula (10), poniendo por m, n, m', n' los valores . . . . $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}, \frac{A'}{C'}, \frac{B'}{C'}$. Llamándolo W, será; . . $cos\ W = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}\ \sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)}} \ldots (28).$

Es el ángulo buscado. Esta fórmula (28) da los ángulos que el primer plano forma con los planos de proyeccion, poniendo sucesivamente el 2.° plano en posiciones paralelas á ellos. Para el ángulo α con el plano YZ se hará en ella $B' = 0$, $C' = 0$; para el $\mathfrak{C}$ con el XZ, $A' = 0$, $C' = 0$; i para el γ con el XY, $A' = 0$, $B' = 0$.

Se obtiene; . . $cos\ \alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$; $cos\ \mathfrak{C} = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$; $cos\ \gamma = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ . . (29)

Estos ángulos son los mismos que formaria con los ejes la normal tirada del oríjen; i así es que cuadrando i sumando sale $cos^2\alpha + cos^2\mathfrak{C} + cos^2\gamma = 1$; que es la fórmula (9), Leccion 37.

El valor de $cos\ W$, sacado en funcion de las constantes de las ecuaciones de los dos planos, puede ponerse en funcion de los ángulos $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma, \alpha', \mathfrak{C}', \gamma'$, que ellos forman con los planos de proyeccion, introduciendo en (28) los valores de A, B, C, A', B', C', tomados de las fórmulas (29).

La sustitucion da, como en (11): . . $cos\ W = cos\ \alpha\ cos\ \alpha' + cos\ \mathfrak{C}\ cos\ \mathfrak{C}' + cos\ \gamma\ cos\ \gamma'$; la misma relacion existente entre los ángulos que forman las dos normales con los ejes.

La condicion de *perpendicularidad* de dos planos sacada de (28), es; . . $AA' + BB' + CC' = 0$ . . (30)

12—Hallar la interseccion de los mismos dos planos. Hai que determinarla por sus proyecciones. Eliminando y entre las dos ecuaciones se obtiene la proyeccion en el plano XZ, i eliminando x se obtiene la proyeccion en el plano YZ.

13—Por una recta dada $(x = mz + g, y = nz + h)$, hacer pasar un plano perpendicular á un plano dado, $Ax + By + Cz + D = 0$.

La ecuacion de un plano que contiene á la recta ((18) Leccion 37), es de esta forma;

$A'(x - mz - g) + B'(y - nz - h) = 0$; ó bien . . . $A'x + B'y - (A'm + B'n)z - A'g - B'h = 0$.

Para el perpendicular al propuesto entra la condicion (30); . . $AA' + BB' - C(A'm + B'n) = 0$.

Eliminando A' entre las dos ecuaciones, desaparece tambien la otra indeterminada B', i queda; . . $(B - nC)(x - mz - g) - (A - mC)(y - nz - h) = 0$ . . . (31).

14—Determinar en magnitud i en posicion la recta que mide la mínima distancia entre dos rectas, $L, (x = mz + g, y = nz + h)$, i $L', (x = m'z + g', y = n'z + h')$, que se cruzan en el espacio.

Es la perpendicular comun, i se la encuentra aplicando varias de las cuestiones resueltas.

Por la recta L tírese un plano P paralelo á la recta L'. (Cuestion 6.ª)
Por la recta L' tírese otro plano Q perpendicular al P. (Cuestion 13.)

} Por la recta L' tírese ahora un plano P' paralelo á la recta L.
} Por la recta L tírese otro plano Q' perpendicular al P'.

La interseccion de los dos planos Q i Q' es la perpendicular comun á las dos rectas. Sus proyecciones se determinarán por la cuestion 12.

Falta hallar la magnitud de la parte de esta comun perpendicular comprendida entre las dos rectas; la cual no es otra que la distancia entre los planos paralelos P i P', que contiene cada uno de ellos á una de las rectas.

Por el punto $(x=g', y=h')$, en que la recta L' corta al plano XY, tírese una perpendicular al plano P (Cuestion 9.ª), que lo será tambien al paralelo P', i encuéntrese su magnitud aplicando la fórmula (26).

El resultado es; . . $P=\frac{(n'-n)(g'-g)-(m'-m)(h'-h)}{\sqrt{((m'-m)^2+(n'-n)^2+(mn'-m'n)^2)}}$. . . (32).

Para comprobar esta fórmula, supóngase 1,° que las rectas dadas se cortan. Será entónces $P=0$, i $(n'-n)(g'-g)-(m'-m)(h'-h)=0$.

Resulta; . . $\frac{g'-g}{m-m'}=\frac{h'-h}{n-n'}$; que es la condicion hallada (6) para que las rectas se corten.

Supòngase 2,° que las rectas son paralelas. Entónces $m=m', n=n'$, i $P=\frac{0}{0}$. La indeterminacion de este valor proviene de que en el caso propuesto pueden pasar por las dos rectas infinitos pares de planos paralelos, unos mas distantes entre sí que otros. Para aplicar á este caso el mismo procedimiento, cosa innecesaria, se tirarian los planos P i P' perpendiculares al plano de las paralelas, i se prescindiria de los Q i Q'.

SECCION 3.ª—Trasformacion de coordenadas.

En el espacio, como en el plano, la trasformacion de coordenadas no altera el grado de la ecuacion de la respectiva línea ó superficie; pues las fórmulas de transicion de un sistema á otro son todas de primer grado en las coordenadas nuevas i primitivas.

Sea 1.°—Pasar á ejes paralelos, mudando el oríjen á un punto (a, b, c).

Las fórmulas serán desde luego; . . $x=a+x'$; $y=b+y'$; $z=c+z'$ . . (A); entrando a, b, c con los signos que les correspondan.

2.°—Pasar de un sistema rectangular $OXYZ$ (Fig. 122), á un sistema oblícuo $OX'Y'Z'$.

La posicion de los nuevos ejes se fija de antemano, ó por las condiciones de la cuestion, por medio de los ángulos que cada uno de ellos forma con los ejes primitivos.

Sea *àng.* $x'x=\alpha$; $y'x=\alpha'$; $z'x=\alpha''$; $x'y=\beta$; $y'y=\beta'$; $z'y=\beta''$; $x'z=\gamma$; $y'z=\gamma'$; $z'z=\gamma''$; entendiéndose que se habla de los ángulos formados por los semi-ejes positivos.

Las coordenadas rectangulares de un punto m son; $mp=z$; $pq=y$, $qO=x$. Las oblicuas; $mp'=z'$, $p'q'=y'$, $q'O=x'$. I si de los puntos m, p', q', se tiran sobre OX las perpendiculares $mq, p's, q'r$, serán proyecciones ortogonales de z', sq; de y', rs; de x', Or; i . . . $x=Oq=Or+rs+sq$ . . (a).

Nótese que las tres perpendiculares se hallan situadas cruzándose en el espacio; i que el punto q es forzosamente pie de la tirada desde m. Si tambien se las tirase desde los mismos puntos sobre los ejes OY, OZ, se obtendrian para y i para z valores de forma igual á la del valor (a) de x: segun lo cual, «cada coordenada rectangular equivale á la suma aljébrica de las proyecciones de las tres nuevas coordenadas sobre el eje rectangular que á ella corresponde.»

Para las tres de (a) se tiene; . . . $Or=Oq'\cos rOq'=x'\cos\alpha$; $rs=p'q'\cos sOY'=y'\cos\alpha'$; . . $sq=mp'\cos qOZ'=z'\cos\alpha''$.

Por tanto, sustituido en (a), espresando por c los cosenos, i aplicando á los valores de y i de z; $x=x'c.\alpha+y'c.\alpha'+z'c.\alpha''$; . . . $y=x'c.\beta+y'c.\beta'+z'c.\beta''$; . . . $z=x'c.\gamma+y'c.\gamma'+z'c.\gamma''$ . . (B).

Contienen estas fórmulas nueve constantes indeterminadas, i solo hai entre ellas tres ecuaciones de relacion ya conocidas, que son las de la fórmula (9), Leccion 37.

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; . . $\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'=1$; . . $\cos^2\alpha''+\cos^2\beta''+\cos^2\gamma''=1$ . . (Bb).

Se asignarán pues valores á seis de las constantes, ó se las determinará por las condiciones de la cuestion; pero no valores absolutamente arbitrarios, sino con la limitacion que se hizo notar para la

misma fórmula (9). I si se fijasen los ángulos que hubieran de formar entre sí los nuevos ejes, la fórmula (11) daria estas otras tres relaciones;

$$cos(x',y') = c.\alpha\, c.\alpha' + c.\beta\, c.\beta' + c.\gamma\, c.\gamma'\,;\; cos(x',z') = c.\alpha\, c.\alpha'' + c.\beta\, c.\beta'' + c.\gamma\, c.\gamma''\,;\; \ldots$$
$$cos(y',z') = c.\alpha'\, c.\alpha'' + c.\beta'\, c.\beta'' + c.\gamma'\, c.\gamma''.$$

Si hubiera de variarse tambien el oríjen, á los valores (B) de x, y, z se agregarian los de las coordenadas a, b, c del nuevo oríjen; considerando hechas las proyecciones de x', y', z' sobre tres paralelas á los ejes primitivos tiradas por el oríjen nuevo.

3.°—Pasar de un sistema rectangular á otro rectangular. En este caso los cosenos de los ángulos de los nuevos ejes son nulos, i de la fórmula (11) salen estas tres ecuaciones, para combinarlas con las (Bb).

$$c.\alpha\, c.\alpha' + c.\beta\, c.\beta' + c.\gamma\, c.\gamma' = 0\,;\; \ldots\, c.\alpha\, c.\alpha'' + c.\beta\, c.\beta'' + c.\gamma\, c.\gamma'' = 0\,;\; \ldots$$
$$c.\alpha'\, c.\alpha'' + c.\beta'\, c.\beta'' + c.\gamma'\, c.\gamma'' = 0\;\; .\; . \text{ (Bc)}.$$

Quedan entonces solamente tres constantes indeterminadas, de las nueve de las fórmulas (B), para darles valores admisibles, ó determinar en funcion de ellas las otras seis.

Se prescindirà de la trasformacion de sistema oblicuo á oblicuo, porque es de mui rara aplicacion.

La trasformacion del caso 3.° de sistema rectangular á rectangular, es la que con frecuencia se emplea: i por el siguiente método, de *trasformaciones sucesivas*, se llega fácilmente á determinar los coeficientes de x', y', z', en funcion de tres constantes arbitrarias.

Sea $OXYZ$ (Fig. 123) el sistema primitivo de ejes rectangulares, del cual se ha de pasar al sistema $OX'Y'Z'$ tambien rectangular. Sea On la interseccion de los planos $XY, X'Y'$; i desígnense por φ el ángulo de la traza On con OX, por ψ el de la misma traza con OX', i por θ el ángulo de los planos $XY, X'Y'$.

Concíbase 1;° que el sistema primitivo jira sobre OZ como eje, hasta coincidir OX con On, i en esta situacion sean t, u, v las coordenadas nuevas correspondientes à las x, y, z de un punto. El eje de las v es el mismo OZ; el plano de las tu es el mismo de las xy; i el eje de las t forma con OX el ángulo φ. Aplicando pues las fórmulas (G) i (H), Leccion 11, se tiene;

$$x = t\,cos\,\varphi - u\,sen\,\varphi\,;\; .\; y = t\,sen\,\varphi + u\,cos\,\varphi\,;\; .\; z = v\;\; .\; . \text{ (m)}.$$

Concíbase 2;° que el sistema (t, u, v), ò mas bien (t, u, z), jira ahora sobre On, hasta coincidir el plano tu con el $X'Y'$, i en esta otra situacion sean t', u', v' las coordenadas correlativas con t, u, v. El eje de las t' es el mismo On, eje de las t; el plano de las $u'v'$ es el mismo de las uv; i el eje de las u' forma con el de las u un ángulo $= \theta$. Las citadas fórmulas dan pues;

$$u = u'\,cos\,\theta - v'\,sen\,\theta\,;\; \ldots\, v = u'\,sen\,\theta + v'\,cos\,\theta\,;\; \ldots\, t = t' \;\ldots \text{ (n)}.$$

Concíbase 3,° i últimamente; que el sistema (t', u', v') jira sobre Ov' hasta que el eje de las t', que coincidia con On, forme con esta recta un ángulo $= \psi$; en cuya posicion son x', y', z' las coordenadas correspondientes á t', u', v'. El eje de las v' es el de las z'; el plano $X'Y'$ es el mismo de las $t'u'$: i ψ es el ángulo $(x't')$. Resulta; $.\; . t' = x'\,cos\,\psi - y'\,sen\,\psi\,;\; .\; . u' = x'\,sen\,\psi + y'\,cos\,\psi\,;\; .\; . v' = z' .\; . \text{ (p)}.$

De las nueve ecuaciones (m), (n), (p), salen con prontitud los valores de x, y, z, en funcion de x', y', z' i de los tres ángulos φ, ψ i θ, como fórmulas de trasformacion.

Cortada una superficie por un plano, puede por este medio hallarse la ecuacion de la seccion *en el mismo plano secante*, tomándole por plano de las $x'y'$, i escojiendo para mayor sencillez por eje de las x' su traza On en el plano XY. Se hará en consecuencia $z' = 0$, $\psi = 0$, i por consiguiente $sen\,\psi = 0$, $cos\,\psi = 1$; i las fórmulas de trasformacion son las siguientes;

$$x = x'\,cos\,\varphi - y\,sen\,\varphi\,cos\,\theta\,;\; .\; . y = x'\,sen\,\varphi + y'\,cos\,\varphi\,cos\,\theta\,;\; .\; . z = y'\,sen\,\theta \;\ldots \text{ (D)}.$$

Aquí se supone que el plano secante pasa por el oríjen. No pasando, se agregarian á los valores de x i de y los de las coordenadas del nuevo oríjen. La naturaleza de estas fórmulas indica «que la seccion plana de una superficie no puede ser de grado superior al de la ecuacion de la superficie.»

Aunque no se ha tratado cuestion alguna del sistema de coordenadas polares, por ser estas lecciones de preparacion para el estudio de la Jeometría descriptiva, que aclara perfectamente todas las relativas al espacio usando de coordenadas rectilíneas para sus construcciones gráficas; se deducirán por conclusion las sencillas fórmulas de trasformacion del sistema rectangular al polar, tomando por polo el oríjen O (Fig. 124), por plano fijo el XY, i por eje polar el eje OX.

Para un punto m es $mp = z$, $pq = y$, $Oq = x$; $.\; . Om = r$, $àng.\, mOp = \theta$, $àng.\, pOq = \varphi$.

$$mp = Om\,sen\,\theta\,;\; pq = Op\,sen\,\varphi\,;\; Oq = Op\,cos\,\varphi\,;\; .\; . z = r\,sen\,\theta;\; y = r\,cos\,\theta\,sen\,\varphi\,;\; x = r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi\;\; .\; . \text{ (E)}.$$

Salen de (E) las fórmulas inversas, para pasar del sistema polar al mismo rectangular; . . .

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \; . \; . \; tanj. \varphi = \frac{y}{x} \; ; \; . \; . \; sen \, \delta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \; . \; . \; . \; (F).$$

Si no hubiese de servir de polo el oríjen, ni de plano fijo uno de los de proyeccion, el procedimiento de trasformacion para lo 1.° seria pasar á un sistema rectangular con las condiciones fijadas, i de este luego al polar; i para lo 2.° emplear tambien como intermedio un sistema rectangular con las mismas condiciones.

LECCION 39.

Superficies curvas.

SECCION 4.ª—Sobre algunas superficies curvas.

Va á ensayarse aquí el procedimiento analítico en la *esfera*, i á deducirse las ecuaciones jenerales de las superficies cónicas, cilíndricas i de revolucion, que son las de jeneracion mas sencilla.

1.° – La esfera — Siendo su centro el punto (a, b, c'), su radio R, i x, y, z las coordenadas jenerales de los puntos de la superficie, su ecuacion debe espresar la condicion de equidistancia de estos puntos al centro. Será pues, para ejes rectangulares, aplicando la fórmula (2) Leccion 36; ....

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \ldots (A).$$

La cual desenvuelta es de esta forma jeneral; . . $x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$ . . (A').

En donde $m = -2a$, $n = -2b$, $p = -2c$, $q = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Estando el centro en uno de los planos de proyeccion, no habria término de primer grado en la otra coordenada; estando en uno de los ejes, no los habria en las otras dos coordenadas; i estando en el oríjen, faltarian los tres términos de primer grado.

Para ejes oblicuos, se aplicará la fórmula (5). La ecuacion resulta de la misma forma (A'); pero con el aumento de tres términos, que contienen los rectángulos de las variables de esta manera especial; ....

$$2xy \; cos \; XOY; \; 2xz \; cos \; XOZ; \; 2yz \; cos \; YOZ.$$

Caracteriza segun esto á la ecuacion de la esfera ser iguales en valor i en signo los coeficientes de los términos en x^2, y^2, z^2; i faltar los rectángulos de las variables, ó aparecer con coeficientes determinados, segun fuere rectangular ú oblicuo el sistema coordenado.

Referida (A) al centro como oríjen, se reduce á . . $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . . (B); i dando valores á cualquiera de las tres variables, desde *cero* hasta $\pm R$, se obtienen por secciones con los planos de proyeccion i con sus paralelos *círculos* que disminuyen hasta reducirse á un punto en el valor R; de modo que la esfera viene á quedar limitada en todos sentidos por seis planos tanjentes paralelos de dos en dos á los de proyeccion i equidistantes, que forman un cubo. Si de (B) se pasase á otro sistema rectangular, por las fórmulas del método de las *trasformaciones sucesivas*, la ecuacion nueva seria $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$, que daria las mismas consecuencias; probándose así «que toda seccion plana de la esfera es un círculo.»

En (A') se ve igualmente que todas las secciones paralelas á los planos de proyeccion son círculos.

Combinando por resta las ecuaciones jenerales (A) de dos esferas, se obtiene;

$$2x(a-a') + 2y(b-b') + 2z(c-c') + q = 0; \text{ ó sea } \ldots \frac{a-a'}{c-c'} x + \frac{b-b'}{c-c'} y + z + k = 0.$$

Es la ecuacion de un plano, i de la forma (23), Leccion 37; siendo los coeficientes de x é y los correspondientes á z en las ecuaciones (5) de la recta que une los centros de las dos esferas. «La interseccion de dos esferas es pues plana, i por consiguiente un círculo; i este círculo es perpendicular á la recta que une los centros.»

Puede hallarse la ecuacion de un plano tanjente á la esfera (B) en un punto (x', y', z'), por la condicion jeométrica de ser perpendicular al radio en el punto de contacto.

Las ecuaciones del radio que pasa por el punto (x', y', z') son, (3); .. $x = \frac{x'}{z'} z$; $y = \frac{y'}{z'} z$.

La del plano perpendicular por el mismo punto, (24); ... $\frac{x'}{z'}(x - x') + \frac{y'}{z'}(y - y') + z - z' = 0$.

Quitando denominadores i poniendo $-R^2$ por $-x'^2 - y'^2 - z'^2$, queda; .. $xx' + yy' + zz' = R^2$.. (C).

Para tirar un plano tanjente por un punto esterior $(\alpha, \varepsilon, \gamma)$, solo habria dos ecuaciones de relacion entre las coordenadas desconocidas x', y', z' del punto de contacto, las cuales serian; .. $x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$. (B'); .. $\alpha x' + \varepsilon y' + \gamma z' = R^2$. (C'). Puede segun esto hacerse pasar por el punto dado infinitos planos, tanjentes á la esfera, lo cual es evidente; i (C') representa, jeneralizadas las coordenadas x', y', z', un plano en que existe la curva lugar jeométrico de los puntos de contacto, que es un círculo perpendicular á la recta que une el centro de la esfera con el punto $(\alpha, \varepsilon, \gamma)$. Este punto es vértice de un cono, tanjente á la esfera en el mismo círculo.

Restando de (B') el duplo de (C'), i añadiendo $\alpha^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2$ á ambos miembros, resulta .... $(x' - \alpha)^2 + (y' - \varepsilon)^2 + (z' - \gamma)^2 = \alpha^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2 - R^2 = R'^2$; ecuacion de otra esfera que tambien contiene los puntos de contacto de los diversos planos tanjentes, cortando á la (B) en el círculo que es su lugar jeométrico. Para que haya infinitas soluciones reales debe ser $\alpha^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2 > R^2$, es decir, debe hallarse el punto $(\alpha, \varepsilon, \gamma)$ fuera de la esfera (B): cuando $\alpha^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2 = R^2$, la 2.ª esfera se reduce á un punto, que es el mismo dado, situado entónces en la superficie de la esfera (B), i de contacto de un solo plano tanjente. Las dos esferas se tocarian, esterior ó interiormente, si la distancia de sus centros fuese $R \pm R'$.

Haciendo pasar por una recta un plano, é introduciendo la condicion de que la perpendicular que se le tire del centro de la esfera equivalga al radio, se obtendrán las ecuaciones de dos planos tanjentes.

2.° – Superficies cónicas — Teniendo presente el sistema de jeneracion de las superficies cónicas (Leccion 34), se encuentra con suma facilidad la ecuacion de una determinada, i la de todas en jeneral.

Para lo 1.° – Sea el punto (a, b, c) el vértice, i $(F(x, z) = 0, f(x, y) = 0)$ la curva directriz.

Designando por x', y', z' las coordenadas de cualquier punto de la directriz, las ecuaciones de la recta jeneratriz que fija en el vértice pasa siempre en su movimiento por uno de esos puntos son; .... $x - a = \frac{a - x'}{c - z'}(z - c)$; .. $y - b = \frac{b - y'}{c - z'}(z - c)$; i entre x', y', z' habrá estas otras dos relaciones que dan las ecuaciones de la directriz; ... $F(x', z') = 0$; .. $f(x', y') = 0$. Eliminando entre estas cuatro ecuaciones á x', y', z' que particularizan un punto, la final en x, y, z representa la jeneratriz en todas sus posiciones, i es por consiguiente la ecuacion de la superficie cónica propuesta.

Para lo 2.° – Las ecuaciones de una recta cualquiera que pasa por determinado punto (a, b, c) son; .. $x - a = m(z - c)$; .. $y - b = n(z - c)$; i para que esta recta, moviéndose sobre ese punto, enjendre una superficie cónica, debe ser regulado su movimiento por medio de cierta relacion entre m i n, dependiente de la forma i posicion de una curva directriz, i obtenible por tanto eliminando x, y, z entre las cuatro ecuaciones de la recta i de la curva. Sea $\varphi(m, n) = 0$ esta relacion: reemplazando en ella m i n por sus valores jenerales sacados de las ecuaciones de la jeneratriz, se obtiene $\varphi\left(\frac{x - a}{z - c}, \frac{y - b}{z - c}\right) = 0$ .. (1), por ecuacion jeneral de las superficies cónicas. En cada caso particular será dato, ó se empezará por encontrar, la relacion $\varphi(m, n) = 0$.

Si el vértice del cono es el oríjen, la ecuacion jeneral se reduce á $\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ ... (2), *funcion homojénea* de x, y, z. Toda funcion homojénea de x, y, z representa una superficie cónica con el vértice en el oríjen, pues que puede reducírsela á esa forma por la division, por no contener término independiente.

Un sistema de planos que pasan por un mismo punto puede ser considerado como un caso particular de las superficies cónicas.

Aplicaciones — Del método 1.° — Búscase la ecuacion del cono cuyo vértice es el punto $x = a$ del eje de las x, i su directriz el círculo $(z = e, x^2 + y^2 = R^2)$, paralelo al plano XY.

Ecuaciones de la jeneratriz; .. $x-a=\frac{x'-a}{z'}z$; .. $y=\frac{y'}{z'}z$; i entre x', y', z' existen ademas las dos relaciones .. $z'=e$, $x'^2+y'^2=R^2$. La eliminacion de x', y', z' da; .. $(ex+az+ae)^2+e^2y^2-R^2z^2=0$.

Si el vértice fuese el oríjen, la ecuacion seria; .. $e^2(x^2+y^2)=R^2z^2$; funcion homojénea.

Del método 2.° — El vértice es el punto (a, b, c), i la directriz la elipse $(z=0, A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2)$, situada en el plano XY. Va á buscarse la relacion $\phi(m, n)=0$.

De las ecuaciones de la jeneratriz i la directriz viene; .. $A^2(b-nc)^2+B^2(a-mc)^2=A^2B^2$.

Poniendo ahora $m=\frac{x-a}{z-c}$, $n=\frac{y-b}{z-c}$, resulta; .. $A^2(bz-cy)^2+B^2(az-cx)^2=A^2B^2(z-c)^2$.

Es la ecuacion del cono. Si se hace $A=B$, $a=0$, $b=0$, será; .. $x^2+y^2=\frac{A^2}{c^2}(z-c)^2=(z-c)^2tanj^2\alpha$; que representa un cono recto de base circular, cuyo eje es el de las z, i que forma con las jeneratrices el ángulo constante α. Se ve claramente que su tanjente es $\frac{A}{c}$; el cociente de la division de los dos catetos de un triángulo rectángulo jenerador.

3.° – Superficies cilíndricas — Atendiendo á su jeneracion (Leccion 35), sea como para el cono.

Lo 1.° – La curva directriz; .. $F(x, z)=0$, $f(x, y)=0$. Las ecuaciones de una jeneratriz que pasa por un punto cualquiera (x', y', z') de la directriz; .. $x-x'=m(z-z')$, $y-y'=n(z-z')$. Entre x', y', z' existen las relaciones; .. $F(x', z')=0$, $f(x', y')=0$. Eliminadas x', y', z' entre estas cuatro ecuaciones últimas, se obtendrá en x, y, z la de la superficie cilíndrica particular.

Lo 2.° – Una jeneratriz en jeneral; ... $x=mz+g$, $y=nz+h$. Para sus diversas posiciones son constantes m i n, en virtud del paralelismo, i variables g i h: i si la recta, moviéndose, ha de enjendrar una superficie cilíndrica, su movimiento debe ser regulado por cierta relacion entre g i h, dependiente de la forma i posicion de la curva directriz; relacion que, ó se conoce, ó se busca eliminando x, y, z entre las cuatro ecuaciones de la jeneratriz i directriz. Sea $\downarrow(g, h)=0$ esa relacion: sustituyendo en ella por g i h sus valores jenerales sacados de las ecuaciones de la jeneratriz, resultará $\downarrow(x-mz, y-nz)=0$ .. (3), por ecuacion jeneral de las superficies cilíndricas.

Si $m=0$, $n=0$, la ecuacion se reduce á $\downarrow(x, y)=0$, i representa una superficie cilíndrica de jeneratrices paralelas al eje de las z; como ya se sabia (Leccion 36).

Aplicaciones — Del método 1.° – Búscase la ecuacion de un cilindro de jeneratrices paralelas á la direccion $(x=mz, y=nz)$, i cuya directriz es la parábola $(z=e, y^2=2px)$, paralela al plano XY. La eliminacion de x', y', z' entre estas cuatro ecuaciones, $x-x'=m(z-z')$, $y-y'=n(z-z')$, $z'=e$, $y'^2=2px'$ da; ... $(y-nz+ne)^2-2px+2mp(z-e)=0$.

Del método 2.° – La directriz es la elipse $(z=0, A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2)$. Eliminando x, y, z entre estas dos ecuaciones i las $x=mz+g$, $y=nz+h$ de una jeneratriz, se encuentra la relacion $\downarrow(g, h)=0$, que es; ... $A^2h^2+B^2g^2=A^2B^2$; i que se convierte en .. $A^2(y-nz)^2+B^2(x-mz)^2=A^2B^2$.

4.° – Superficies de revolucion — Puede concebírselas enjendradas de dos maneras.

1.ª – Por una línea que jira al rededor de un eje recto fijo, describiendo cada punto de la jeneratriz un círculo perpendicular al eje, llamado *paralelo*. Existente ya la superficie, puede considerársele por jeneratriz cualquiera otra línea trazada en ella: entre estas, la mas notable es la seccion *meridiana*, ó por el eje.

Sean $(x=mz+g, y=nz+h)$ el eje; i $(F(x, z)=0, f(y, z)=0)$ la jeneratriz en cierta posicion.

Una esfera, con centro en la traza $(g, h, 0)$ del eje en el plano XY, i que pasa por un punto (x', y', z') de la jeneratriz, tiene por ecuacion; ... $(x-g)^2+(y-h)^2+z^2=(x'-g)^2+(y'-h)^2+z'^2$ .. (a). La de un plano perpendicular al eje, i que pase por (x', y', z'), es .. $m(x-x')+n(y-y')+z-z'=0$ .. (b)

Combinadas (a) i (b), se tiene el *paralelo* correspondiente al punto (x', y', z').

Se tiene ademas; ... $F(x', z')=0$, $f(y', z')=0$ .. (c); por ser punto de la jeneratriz el (x', y', z').

Eliminando x', y', z' entre las cuatro ecuaciones (a), (b), (c), se obtiene en x, y, z una ecuacion que representa el conjunto de todos los paralelos, i por consiguiente la superficie particular determinada por los datos.

Ejemplo — Búscase la ecuacion del *toro*, ó *superficie anular*, considerándola enjendrada por un círculo *meridiano* que jira al rededor del eje OZ, conservando el centro en el plano XY.

Posicion inicial de la jeneratriz; $y = 0$; .. $(x-a)^2+z^2 = R^2$; un círculo en el plano XZ, con el centro en el eje de las x.

Una esfera, con centro en el pie del eje, que es el oríjen, i que pasa por un punto (x', y', z') de la jeneratriz; ... $x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ (a')

Un plano perpendicular al eje, i por tanto paralelo al XY, que pasa por el mismo punto; .. $z = z'$ (b')

$y' = 0$; $(x'-a)^2+z'^2 = R^2$ .. (c'). La eliminacion entre (a'), (b') i (c') da; ....

$$x^2+y^2 = (a \pm \sqrt{(R^2-z^2)})^2 \text{ .. (M)}.$$

Cuando $R < a$, la superficie deja un espacio vacío al rededor del eje; i cuando $R > a$ su parte interior forma por arriba i por abajo dos concavidades iguales.

2.ª jeneracion — Por un círculo de radio variable, que se mueve conservándose siempre perpendicular al eje, i con el centro en él, apoyado en una línea jeneratriz.

Ecuaciones de una recta en jeneral, que es el eje; $x = mz+g$, $y = nz+h$.

Una esfera, con centro en la traza $(g, h, 0)$ de la recta; .. $(x-g)^2+(y-h)^2+z^2 = R^2$ .. (e).

Un plano perpendicular al eje designado; .. $mx+ny+z = p$ .. (f).

El sistema de (e) i (f) representa un círculo con centro en la recta, i perpendicular á ella, dependiendo su posicion i magnitud de los valores de R i p: i si existe una ecuacion de relacion entre R i p, ó se la deduce de los datos que son la posicion del eje i la forma i posicion inicial de una jeneratriz, se obtendrá un conjunto de *paralelos* de una superficie de revolucion. Sea la relacion de esta forma; .. $R^2 = \varphi(p)$ .. (g).

Eliminadas ahora R i p entre las tres ecuaciones (e), (f) i (g), viene en x, y, z la ecuacion jeneral de las superficies de revolucion; .. $(x-g)^2+(y-h)^2+z^2 = \varphi(mx+ny+z)$ .. (4).

Siendo eje de la superficie el eje OZ, es $g = 0$, $h = 0$, $m = 0$, $n = 0$.

Entonces la ecuacion (4) se reduce á ... $x^2+y^2+z^2 = \varphi(z)$; ó bien .. $x^2+y^2 = \downarrow(z)$ .. (5). De esta última forma es la ecuacion (M) del *toro*.

Ejemplo — Búscase la ecuacion de la superficie enjendrada por una recta que jira al rededor del eje de las z; i sea .. $x = mz+g$, $y = nz+h$ la jeneratriz.

$x^2+y^2+z^2 = R^2$ .. (e'); $z = p$ .. (f') } La esfera i el plano.

La eliminacion de x, y, z da por relacion entre R i p; ... $(mp+g)^2+(np+h)^2 = R^2-p^2$ .. (g').

I puestos en (g') los valores de R i p que dan (e') i (f'), queda; $x^2+y^2 = (mz+g)^2+(nz+h)^2$.

Tiene la 2.ª forma (5). Es la ecuacion de un *hiperboloide de una hoja*.

Si la jeneratriz fuese paralela al eje, ó lo cortase, resultaria un cilindro ó un cono rectos, de base circular.

Nota — A las constantes arbitrarias que como m i n para las superficies cónicas, g i h para las cilíndricas, i R i p para las de revolucion, regularizan el movimiento de una línea jeneratriz sobre una ó mas directrices para la jeneracion de una superficie, se las designa con el nombre de *paràmetros variables*. Figuran como elementos en las ecuaciones de las líneas que entran en la respectiva cuestion analítica; i siendo n el número de directrices, los parámetros deben ser $n+1$, relacionados entre sí por n ecuaciones, para que la superficie á que se refieren quede determinada.

LECCION 40.

Tanjentes, planos tanjentes, asíntotas, centros.

SECCION 5.ª — Tanjentes, planos tanjentes, asíntotas.

En esta i en las siguientes teorías, los principios i los procedimientos son análogos, ó puede decirse idénticos, á los de las teorías correspondientes de la Parte 1.ª i no exijen por lo mismo sino pocas esplicaciones.

Sea . . $Ax+By+Cz+Dx^2+Ey^2+Fz^2+Gxy+\ldots=0$ . . (1) la ecuacion (sin término independiente) de una superficie que pasa por el oríjen.

Sean . . $x=mz, y=nz$ . . (2) las ecuaciones de una secante que pasa por el mismo punto.

Eliminando x é y entre (1) i (2), sale; . . $(Am+Bn+C)z+Pz^2+Qz^3+\ldots=0$ . . (3).

Las raices de (3) son las z de los diversos puntos de interseccion de la secante con la superficie: i para que jirando la secante sobre el punto de oríjen se convierta en tanjente, debe haber dos raices *nulas*, i ser por tanto . . $Am+Bn+C=0$ . . (4).

La ecuacion (4) es la única de relacion entre los coeficientes m i n de la recta (2), por la condicion de tanjencia. Se pueden tirar pues por el oríjen infinitas tanjentes: i el lugar jeométrico de ellas, que se obtiene poniendo por m i n sus valores sacados de las ecuaciones (2), es . . $Ax+By+Cz=0$ . . (5).

Representa un plano tanjente; i es «la igualacion á cero del conjunto de los términos de primer grado de la ecuacion propuesta.» En (5) se advierte que el plano tanjente por el oríjen coincide con uno de los ejes coordenados cuando falta en la ecuacion término de primer grado en una de las variables; i que coincide con uno de los planos de proyeccion cuando hai un solo tèrmino de primer grado.

Si por un punto cualquiera (x', y', z') de la superficie $F(x, y, z)=0$ se quiere tirarle un plano tanjente, se trasladará el oríjen al punto dado, pasando á ejes paralelos. Designando por t, u, v las nuevas coordenadas, la ecuacion (5) del plano tanjente es en ellas . . $At+Bu+Cv=0$; i en las primitivas . . $A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$ . . (6).

Los coeficientes A, B, C, son las *derivadas parciales* del primer miembro de la ecuacion propuesta, cambiadas x, y, z en x', y', z'.

Para la superficie . . $b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$, las derivadas parciales son $2b^2c^2x$, $2a^2c^2y$, $2a^2b^2z$; i la ecuacion jeneral (6) del plano tanjente . . $b^2c^2x'(x-x')+a^2c^2y'(y-y')+a^2b^2z'(z-z')=0$. I como $-b^2c^2x'^2-a^2c^2y'^2-a^2b^2z'^2=-a^2b^2c^2$, será simplificando; . . $b^2c^2xx'+a^2c^2yy'+a^2b^2zz'=a^2b^2c^2$.

Para tirar á la superficie $F(x, y, z)=0$ un plano tanjente desde un punto $(\alpha, \varepsilon, \gamma)$ cualquiera, solo hai entre las coordenadas desconocidas x', y', z' del punto de contacto dos ecuaciones de relacion, que son; . . $A(\alpha-x')+B(\varepsilon-y')+C(\gamma-z')=0$; . . $F(x', y', z')=0$.

De manera que, en jeneral, pueden tirarse por el indicado punto infinitos planos tanjentes, cuyas sucesivas intersecciones forman un cono tanjente. La curva de contacto será plana ó de doble curvatura; i la ecuacion de la superficie secante que la contenga será del grado $n-1$. La curva de contacto de un cono ó cilindro tanjente á una superficie de 2.° grado es por consiguiente plana.

Un plano tanjente es el conjunto de las tanjentes que por el punto de contacto pueden tirarse á las diferentes curvas trazadas en la superficie, que pasen por el mismo punto.

Segun la naturaleza de la superficie, un plano tanjente, sin dejar de serlo en el punto de contacto, puede ser tambien secante. Será simplemente tanjente en un punto, en las superficies convejas en todos sentidos; i tanjente en una línea recta, ó tanjente en un punto i secante en líneas rectas, en aquellas que admiten á la línea recta por jeneratriz.

Un plano tanjente es el elemento plano de la superficie, indefinidamente prolongado en todas direcciones.

Normal — Recta perpendicular al plano tanjente en el punto de contacto.

Plano normal — Cualquiera de los infinitos que pasan por la normal.

Las ecuaciones de la normal, i la del plano normal, pueden deducirse de la del plano tanjente, conforme á los principios establecidos en las lecciones precedentes; i todas las cuestiones relativas á normales i á planos normales son de considerarse ya de fácil resolucion.

Concibiendo que à una curva, plana ó de doble curvatura, existente en el espacio, se le ha tirado una tanjente, se reconoce que «las proyecciones de la tanjente son tanjentes á las proyecciones de la curva,» como trazas de un cilindro i un plano proyectantes tanjentes entre sí; i que «los puntos de contacto en las proyecciones son proyecciones del punto de contacto en el espacio.»

De aquí se deduce; que todas las cuestiones analíticas sobre tanjentes á una curva situada en el espacio pueden resolverse en los planos de proyeccion.

Sean $F(x, z)=0, f(y, z)=0$ . . (m) las ecuaciones de una curva, que son las de sus proyecciones en los planos XZ, YZ. Serán . . $A(x-x')+B(z-z')=0$, $C(y-y')+D(z-z')=0$ . . (n) las ecua-

ciones de las tanjentes á las proyecciones de la curva, en los puntos correspondientes al (x',y',z') de contacto en el espacio; i ecuaciones por tanto de la tanjente á la curva. Los coeficientes A, B, C, D son las respectivas derivadas parciales.

Eliminando x',y',z', entre $F(x',z')=0$, $f(y',z')=0$ i las ecuaciones (n), queda en x,y,z la ecuacion de una superficie, lugar jeométrico de todas las tanjentes que pueden tirarse en el espacio á la curva (m). Esa superficie, formada por los elementos planos que determina cada par de tanjentes consecutivas, es *desarrollable* en un plano; i su *arista de retroceso* es la curva (m). Si un plano tanjente á dos superficies se mueve conservando la doble tanjencia, la serie de intersecciones de sus posiciones sucesivas forma una *superficie desarrollable*, i las intersecciones mismas forman por su concurso su *arista de retroceso*. Cuando esta arista se reduce á un punto, la superficie desarrollable es cónica, con el vértice en aquel punto.

Las asìntotas de una curva del espacio tienen notoriamente por ecuaciones las de las asíntotas de sus proyecciones. Las superficies infinitas pueden tener *conos asintóticos*, que en algunos casos no será difícil determinar. Cuando la ecuacion del grado m de una superficie no contiene términos del grado $m-1$, el conjunto de los términos del grado m igualado á *cero*, que por ser funcion homojénea de las variables representa un cono con el vértice en el oríjen, es la ecuacion de un *cono asintótico*: pues en este caso, buscando las intersecciones de una jeneratriz del cono con la superficie, se hallan dos, situadas ambas en el infinito. Si no faltan los términos del grado $m-1$, pero tienen un factor comun con los del grado m, este factor comun igualado á *cero* tambien representa un cono asintótico; que seria *plano asintótico* si el factor comun fuese del primer grado.

Para encontrar el cono asintótico cuyo vértice no está en el oríjen, se pasaria á ejes paralelos, i se determinarian las tres coordenadas del nuevo oríjen por la condicion de desaparecer los términos del grado $m-1$, ó de tener un factor comun con los del grado m.

SECCION 6.ª—Centros de las superficies.

Centro de una superficie: un punto situado de tal manera, que todas las cuerdas que por él pasan quedan divididas allí por mitad.

Si el oríjen de las coordenadas está en el centro, siendo aljébrica i de grado par la ecuacion de la superficie, solo contendrá términos de grado par en las variables, con término independiente ó sin él; i si es de grado ímpar, todos los términos serán tambien de grado ímpar en las variables, i no habrá término independiente, estando entonces el centro en la superficie misma. Porque para cada punto existirá otro directamente opuesto, de coordenadas de igual valor absoluto pero de contrario signo.

Si la ecuacion no presenta alguno de los dos caracteres dichos, el centro si le hai se encontrará pasando á ejes paralelos, é inquiriendo si las ordenadas del nuevo oríjen quedarán determinadas con valores reales i finitos por la condicion de desaparecer de la ecuacion trasformada los términos sobrantes.
Sea la jral. del 2.º grado; .. $Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'xz+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+G=0$ .. (7).

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Por } x\,..\,x+a & \left\{\tfrac{1}{2}\text{ Coef. de } x;\ Aa+B'c+C'b+A''=0\right\}\\ \text{Por } y\,..\,y+b & \left\{\tfrac{1}{2}\text{ Coef. de } y;\ Bb+C'a+A'c+B''=0\right\}\\ \text{Por } z\,..\,z+c & \left\{\tfrac{1}{2}\text{ Coef. de } z;\ Cc+A'b+B'a+C''=0\right\}\end{array}\right\}(8)$$

Sale; $..a=\dfrac{N}{D};b=\dfrac{N'}{D};c=\dfrac{N''}{D}\ldots$ (9).

$D=AA'^2+BB'^2+CC'^2-ABC-2A'B'C'$ (10).

Las ecuaciones (8) de condicion son las derivadas parciales en x, y, z de la ecuacion propuesta, reemplazadas x, y, z por x',y',z' i suprimido el factor comun 2. Los tres numeradores N, N', N'' de los valores que ellas dan para las coordenadas del centro, son polinomios de seis términos, funciones racionales i enteras de los nueve coeficientes de las variables, i reductibles á la forma .. $A''\alpha+B''\beta+C''\gamma$.

La trasformada al centro será; .. $Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'xz+2C'xy+F=0$.

Siendo $F=Aa^2+Bb^2+Cc^2+2A'bc+2B'ac+2C'ab+2A''a+2B''b+2C''c+G$; que es «el primer miembro de la ecuacion propuesta, reemplazadas x, y, z por $a, b, c,$» i en que deben introducirse los valores de estas tres coordenadas.

El valor aljébrico de F se reduce á $F=G-Aa^2-Bb^2-Cc^2$, multiplicando la 1.ª ecuacion (8) por $2a$, la 2.ª por $2b$, la 3.ª por $2c$, sumándolas luego, i agregando á ambos miembros lo necesario.

Si D es >0 ó <0, como los tres numeradores N, N', N'' son reales i finitos, los valores (9) de a, b, c son tambien reales i finitos: hai centro, i en él queda situado el oríjen con la sustitucion de dichos valores en F.

Si $D = 0$, sin que sea nulo alguno de los numeradores, los valores de a, b, c son infinitos i la superficie no tiene centro; pero si alguno de los numeradores es nulo, en cuyo caso lo serán todos tres, hai infinitos centros por ser $a = \frac{0}{0}$, $b = \frac{0}{0}$, $c = \frac{0}{0}$.

Consideradas a, b, c como variables, las ecuaciones (8) representan tres planos.

Si son planos diferentes, i se cortan en un punto, hai centro, que es el que da la solucion comun única de las tres ecuaciones. Si se cortan solo de dos en dos, en tres rectas paralelas, ó son paralelos todos tres, no hai centro; i entonces las ecuaciones, ó solamente admiten infinitas soluciones comunes de dos en dos, pudiendo ser reducida cada una de ellas á la forma binomia (18), Leccion 37, ó no dan ninguna solucion comun. I si se cortan los tres en una misma línea recta, hai infinidad de centros, que lo son todos los puntos de esta recta; i las tres ecuaciones admiten infinidad de soluciones comunes, á pesar de ser diversas, porque son reductibles á la forma binomia indicada, que solo da dos relaciones entre las tres variables.

Puede suceder en fin que dos de los planos coincidan i corten al otro en una recta, siendo esta entonces como antes lugar jeométrico de infinitos centros, ó *eje central*, i reduciéndose dos de las ecuaciones (8) á una sola: ó que coincidan los tres planos en uno, que será *plano central*, cuyos puntos son todos centro de la superficie, i en tal caso las tres ecuaciones (8) se reducen á una sola, que es cualquiera de ellas.

Cuando hai *eje central*, la superficie (17) es cilíndrica, pues que cortada por cualquier plano por el eje da una línea del 2.° órden con infinidad de centros, que es (Leccion 12) el sistema de dos rectas paralelas al mismo eje: i ese cilindro es de base ó directriz elíptica ó hiperbólica, pues cortando á la superficie por un plano que corte al eje se obtiene por seccion una curva del 2.° grado con centro.

Cuando hai *plano central*, la superficie está formada por el sistema de dos planos paralelos equidistantes del central, que es tambien una superficie cilíndrica; porque si se concibe que en el plano central se han trazado dos rectas p, q, que se cortan, i que por ellas se han hecho pasar diferentes planos secantes, se advertirá que las intersecciones de cada plano con la superficie son dos rectas paralelas al plano central, i que las intersecciones de los planos del sistema p cortan á las intersecciones de los planos del sistema q, determinando planos paralelos.

Por lo que resulta de la precedente discusion particular, podrian dividirse desde ahora las superficies del 2.° grado en tres clases, á saber; con centro, sin centro, i con infinitos centros; pero estas últimas se hallarán comprendidas en las ecuaciones de las superficies con centro, en la reduccion que se hará de la ecuacion jeneral por medio de los planos diametrales.

LECCION 41.

Planos diametrales.

SECCION 7.ª—Diámetros i planos diametrales.

Con relacion á una superficie dada, llámase *superficie diametral* al lugar jeométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas: i si este lugar jeométrico es un plano, será plano diametral *principal*, ú *oblicuo*, segun fuere ó nó perpendicular á las cuerdas, las cuales en el primer caso reciben el nombre de *cuerdas principales*.

La superficie diametral tendrá mas de una hoja, si las cuerdas de su sistema correspondiente cortan en mas de dos puntos á la superficie dada.

Tres planos diametrales son *conjugados* entre sí, dividiendo cada uno de ellos por mitad las cuerdas paralelas á la interseccion de los otros dos.

Será diametral el plano XY, con respecto á las cuerdas paralelas al eje de las z, si para cada par de valores correlativos de x é y da la ecuacion para z valores iguales i de contrario signo de dos en dos; para

lo cual no deberá ella contener sino potencias pares de z. Si la ecuacion de la superficie, siendo aljébrica, contiene á una de las variables con potencias pares solamente, es plano diametral uno de los planos de proyeccion: si á dos, dos planos de proyeccion son diametrales: i si x, y, z no aparecen sino con esponentes pares, los tres planos de proyeccion son diametrales conjugados.

Una superficie del grado n puede ser cortada por una recta en n puntos, dando $\frac{n(n-1)}{2}$ cuerdas: la superficie diametral es pues del grado $\frac{n(n-1)}{2}$. Siendo la primera del 2.º grado, será la segunda del grado $\frac{2\times 1}{2}=1$, es decir, un plano. Para hallar la ecuacion de la superficie diametral se procede como en la Leccion 13 para la línea diametral.

Superficie dada; .. $F(x,y,z)=0$ .. (A). Direccion de un sistema de cuerdas; .. $x=mz$, $y=nz$.

Una recta de este sistema; .. $x=mz+g$, $y=nz+h$.. (B). Reemplazando x é y en (A) por sus valores (B), queda una ecuacion .. $\varphi(z)=0$, cuyas raices son las z de las intersecciones de la recta (B) con la superficie (A).

Sean $z=c$, $z=c'$ dos raices: será $z'=\frac{1}{2}(c+c')$ para el punto medio de la respectiva cuerda.

Sean x', y' sus otras dos coordenadas: de (B) se obtiene; .. $x'=mz'+g$, $y'=nz'+h$.

Agregando à estas tres ecuaciones estas otras dos, .. $\varphi(c)=0$, $\varphi(c')=0$, pueden ser eliminadas c i c' que particularizan una cuerda, g i h que particularizan la recta que la contiene; i resultará en x', y', z' jeneralizadas, que representan ya los puntos medios de *todas las cuerdas*, la ecuacion de la superficie diametral.

Se aplicará la teoría, desenvolviéndola, á la ecuacion jeneral del 2.º grado.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'xz+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+G=0 \text{ .. (C)}$$

$x=mz+g$; $y=nz+h$ } $\varphi(z)=0$ es de la forma ... $z^2+Pz+Q=0$; i .. $z'=-\frac{1}{2}P$.

P es el conjunto de los coeficientes de z, dividido por el conjunto de los coeficientes de z^2.

$$\frac{1}{2}P=-\frac{1}{2}(c+c')=\frac{(Am+C'n+B')g+(Bn+C'm+A')h+A''m+B''n+C''}{Am^2+Bn^2+C+2A'n+2B'm+2C'mn}=-z'.$$

Entre esta ecuacion, i las .. $x'=mz'+g$, $y'=nz'+h$, se eliminan g i h, i se obtiene;

$(Am+C'n+B')x+(Bn+C'm+A')y+(A'n+B'm+C)z+A''m+B''n+C''=0$ .. (D).

Es la ecuacion de un plano diametral, la cual puede ordenarse tambien así;

$(Ax+C'y+B'z+A'')m+(By+A'z+C'x+B'')n+Cz+B'x+A'y+C''=0$ .. (D').

Bajo esta última forma se ve claramente que el plano diametral pasa por el centro, si le hai, supuesto que cada uno de los cuatrinomios sucesivos se anula reemplazando x, y, z por las coordenadas a, b, c del centro, lo cual los convierte en las ecuaciones (8), Leccion 40: i bajo ambas formas se percibe con claridad la estructura de la ecuacion respectiva.

Todos los coeficientes son reales en (D). Por tanto, para cualesquiera valores de m i n, es decir, para cualquier sistema de cuerdas paralelas, hai plano diametral en las superficies del 2.º grado.

Esceptúase, sin embargo, el caso en que sean tales los valores de m i n, que de ellos resulte; .... $A'm+C'n+B'=0$; $Bn+C'm+A'=0$; $A'n+B'm+C=0$ .. (E): entonces desaparecen de la ecuacion los términos en x, y, z, quedando reducida á .. $A''m+B''n+C''=0$, i el plano se ha alejado al infinito. La condicion para que esto pueda suceder, es *que la superficie no tenga centro*, pues la eliminacion de m i n en las tres ecuaciones (E) da .. $AA'^2+BB'^2+CC'^2-ABC-2A'B'C'=0$; ó sea $D=0$ ((10) Leccion 40).

De manera que, hai para las superficies sin centro cierto sistema de cuerdas paralelas á que no corresponde plano diametral; sin duda porque estas cuerdas no cortan á la respectiva superficie en dos puntos.

Si se quisiese determinar un plano diametral paralelo á un plano dado, podrian hallarse los valores de m i n para el sistema de cuerdas correspondiente.

Inquiérese ahora si las superficies comprendidas en la ecuacion jeneral (C) tienen planos diametrales principales; lo cual se hará buscando los sistemas de cuerdas principales que les corresponderán.

La condicion de perpendicularidad de una recta á un plano es .. $m=\frac{A}{C}$, $n=\frac{B}{C}$; que aplicada al sistema de cuerdas perpendiculares al plano (D) es;

$$m=\frac{Am+C'n+B'}{A'n+B'm+C}\ ;\ n=\frac{Bn+C'm+A'}{A'n+B'm+C}\ \ldots(a).$$

Para facilitar el procedimiento, cuyo objeto es determinar los valores de m i n que satisfacen á la cuestion, si los hai, se introducirá una nueva incógnita $\ldots p=A'n+B'm+C\ldots(b)$.

Con esto, las ecuaciones (a) de condicion son; ...

$$(p-A)\,m-C'n-B'=0;\ (p-B)\,n-C'm-A'=0\ \ldots(a').$$

Sacados de (a') los valores de m i n, é introducidos en (b), resulta;

$$p^3-(A+B+C)\,p^2+(AB+AC+BC-A'^2-B'^2-C'^2)\,p+AA'^2+BB'^2+CC'^2-ABC-2A'B'C=0\ldots(F)$$

El término independiente en esta ecuacion es el valor de D, ((10) Leccion 40).

Tiene (F) una raiz real por lo menos, con valores reales correspondientes para m i n: i así «hai en las superficies (C) un sistema de cuerdas principales por lo menos,» i puede haber tres siendo reales las otras dos raices. Mas los valores de m i n pudieran ser alguna vez tales, que el plano diametral principal respectivo se hallase en el infinito; lo cual se vió arriba que sucede únicamente para superficies sin centro. Entonces es *cero* el término independiente en (F); una raiz p se anula; i las ecuaciones (b) i (a') se reducen á las (E), como debia suceder, con el valor $p=0$.

Reduccion de la ecuacion jeneral del 2.° grado à sus mas sencillas formas.

Supóngase la ecuacion (C) referida á ejes rectangulares, en que OZ sea paralelo al sistema de cuerdas principales que ya se sabe admiten todas las superficies del 2.° grado. Entonces será $m=0$, $n=0$; i el plano diametral principal correspondiente, paralelo al XY, tiene por ecuacion $z=K$, siendo K una constante. Sucediendo esto, en la ecuacion jeneral (D) de los planos diametrales son $B'=0$, $A'=0$, por desaparecer los términos en x i en y; queda $z=-\frac{C''}{C}$; i pierde (C) los términos en yz i xz, reduciéndose á $\ldots Ax^2+By^2+Cz^2+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+G=0\ldots(G)$.

Esta primera reducida (G), referente al sistema dicho de ejes rectangulares, todavía representa *todas las superficies del 2.° grado:* i aun puede obtenerse otra, privada del término en xy, i de la forma

$$Px^2+Qy^2+Cz^2+P'x+Q'y+2C''z+G'=0\ldots(H),$$

que tambien representa á todas dichas superficies, con la misma condicion de ser $z=-\frac{C''}{C}$ un plano diametral principal; conservando el oríjen i el eje OZ, i pasando en el plano XY á otros ejes, rectangulares *únicos* ú oblicuos *infinitos*, segun lo visto en las Lecciones 13 i 21.

Pero si en (G) se supone al eje OZ cualquiera direccion, aunque siempre paralela á las cuerdas correspondientes á $z=-\frac{C''}{C}$ como *simple plano diametral*, sucederá; que si tiene centro la superficie, como por él pasa el plano diametral, hai para $\frac{C''}{C}$ valor finito, i C no es nulo; pero si la superficie no tiene centro, i es tal la direccion de OZ que el plano diametral esté en el infinito, es $z=-\frac{C''}{C}=\infty$, i $C=0$.

De manera que, aun con ese cambio en OZ, representará (G) las superficies con centro; i para las sin centro se modifica así; $\ldots Ax^2+By^2+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+G=0\ldots(J)$.

Volvamos á la ecuacion (G). Cámbiese en el plano XY la direccion de los ejes, conservando el OZ. La trasformacion solo afecta á la traza de la superficie en dicho plano, que resulta de hacer $z=0$ en (G), i podrá privarse á la ecuacion del término en xy por infinitos sistemas de ejes conjugados oblicuos i *uno solo rectangular*. Esa traza es la curva de 2.° grado $\ldots Ax^2+2C'xy+By^2+2A''x+2B''y+G=0$; con centro si C'^2-AB es $>$ ó <0, i sin centro si es $=0$, porque $4C'^2-4AB$ representa aquí el binomio B^2-4AC de las fórmulas (4) i (5), Leccion 12. I la superficie tambien tiene centro en el primer caso, i no lo tiene en el 2,° por ser C'^2-AB el remanente del valor de D, Leccion 40, cuando $A'=0$, $B'=0$.

Caso 1.°; $C'^2-AB>$ ó <0 } Siendo $C'=0$, no podrian ser nulos A i B, por tener centro la traza en XY; i así (G) no contendria término en xy, pero sí los contendria en x^2, y^2, z^2. No siendo $C'=0$, pueden ser A i B nulos en el primer supuesto del caso, (hipérbola); pero, hecha la trasformacion para anular el término en xy, existen siempre los términos en x^2, y^2, por la razon indicada, de que la curva en

XY tiene centro. Sea pues con ejes oblicuos, ó con rectangulares, las superficies con centro pueden ser traidas siempre á esta forma analítica; .. $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + Qx + Q'y + Q''z + F = 0$ .. (K).

Para llevar el oríjen al centro (a, b, c), pasando á ejes paralelos, por x, y, z se pondrá en (K) $x+a$, $y+b$, $z+c$, i se igualarán á *cero* en la trasformada los coeficientes de x, y, z: resultan las ecuaciones .. $2aP + Q = 0$, $2bP' + Q' = 0$, $2cP'' + Q'' = 0$; que dan valores reales i finitos para a, b, c cuando P, P', P'' no son nulos. Así toma la ecuacion (C) la forma sencilla definitiva $Mx^2 + Ny^2 + Rz^2 = H$.. (L); «que representa todas las superficies de 2.° grado *con centro*, situado el oríjen en el centro, i siendo Planos diametrales conjugados los tres planos de proyeccion.»

De (G) no ha podido pasarse á (K) i á (L) sino de una sola manera conservando rectangulares los ejes, pero ha podido pasarse de infinitas maneras por sistemas oblicuos: en el primer caso son planos diametrales *principales* de la superficie los conjugados. «Las superficies con centro tienen pues un sistema de tres planos principales conjugados, i tres sistemas correlativos de cuerdas principales, siendo para ellas reales las tres raices de la ecuacion (F); i admiten infinitos sistemas de planos diametrales conjugados.»

Si conservándose en (G) rectangulares los ejes, es $C' = 0$, $A = B$, será en (L) $M = N$. Entonces la traza de estas superficies en el plano XY es circular, i todos sus diámetros conjugados perpendiculares: la ecuacion toma la forma $x^2 + y^2 = \downarrow(z)$, i las superficies que ella representa son todas *de revolucion* sobre el eje de las z, ((5) Leccion 39). Tienen ellas infinitos sistemas de planos principales conjugados; pues que todo plano perpendicular al eje forma un sistema con cualesquiera dos planos perpendiculares entre sí que pasen por el eje.

Caso 2.°; $C'^2 - AB = 0$ } La traza en el plano XY de las superficies (G) es parábola, i pueden cambiarse en dicho plano los ejes anulando el término en xy: entonces, por ser parábola la curva, faltará tambien en la trasformada x^2 ó y^2. La trasformacion se hace de infinitos modos (Leccion 21) pasando á ejes oblicuos, i de uno solo pasando á rectangulares.

Suponiendo faltar el término en x^2, queda (G) así; .. $P'y^2 + Cz^2 + Qx + Q'y + 2C''z + G' = 0$ .. (M); que puede reducirse á la forma final .. $My^2 + Nz^2 + Rx = 0$ .. (N), pasando á ejes paralelos. Esta es «la ecuacion jeneral simplificada de las superficies *sin centro*, estando el oríjen en la superficie;» en que se vé que el plano XY es diametral de las cuerdas paralelas á OZ, el XZ diametral de las paralelas á OY, i los dos conjugados entre sí, sea cual fuere la direccion de OZ. Si esta direccion fuese la de las cuerdas cuyo plano diametral está en el infinito, seria en (G) $C = 0$; la ecuacion jeneral (C) se reduciria á la (J); i de esta se pasaria á $Mx^2 + Ny^2 + Rz = 0$ .. (N'), que representa lo mismo que (N) cambiada la x en z.

Cada una de las ecuaciones (N), (N') da dos sistemas de cuerdas principales, en la hipótesis admisible de ser rectangulares los respectivos planos conjugados. Son por tanto reales tambien para estas superficies las tres raices de la ecuacion (F); pero una de ellas corresponde al sistema de cuerdas cuyo plano diametral está en el infinito.

Por resultado de esta discusion, todas las superficies de 2.° grado con centro i sin él pueden siempre reducirse á una de las formas (L) i (N); que todavía admiten modificaciones para casos particulares.

La ecuacion (K) representa cilindros paralelos á los ejes, i de bases elípticas ó hiperbólicas, cuando en ella faltan dos términos afectos de una misma variable; i cilindros paralelos á los planos de proyeccion, i de base parabólica, cuando faltan dos de los cuadrados de las variables. Lo 1.° es notorio. En cuanto á lo 2,° supóngase $P = 0$, $P' = 0$: dando á z cualesquiera valores c, c' &c, se obtienen rectas paralelas, en planos paralelos al XY; i haciendo $y = 0$, $y = b$ &c, se obtienen parábolas iguales en el plano XZ i sus paralelos. La superficie cilíndrica, con eje central ó sin él, está pues comprendida en (K); i tambien la de plano central, puesto que dos rectas paralelas son variedad de la parábola, lo cual sucederia si quedase en (K) una variable solamente.

LECCION 42.

Superficies de segundo órden.

SECCION 8.ª—Superficies de 2.º órden.

La ecuacion jeneral del 2.º grado entre tres variables ((C) Leccion 41), pudiera ser discutida como lo fué la de dos variables (Lecciones 19, 20 i 21), para clasificar por caracteres analíticos las superficies que ella comprende, determinar en jeneral sus formas, límites &c, i establecer sus ecuaciones especiales.

Resuelta en x, dará; . . $x = -\frac{B'z+C'y+A''}{A} \pm \frac{1}{A}\sqrt{(ay^2+byz+cz^2+dy+ez+g)}$.

La parte independiente del radical representa un plano . . $Ax+B'z+C'y+A''=0$, notoriamente bisector de un sistema de cuerdas de la respectiva superficie, paralelas al eje OX; es decir, un *plano diametral*. La forma de la superficie depende de la parte radical, magnitud de las semi-cuerdas que por cada par de valores correlativos de y, z han de agregarse ó quitarse á las x del plano para obtener puntos de la superficie; i esa parte radical puede analizarse. La igualacion á *cero* de la parte radical da la proyeccion en el plano YZ de la interseccion de la superficie con el plano diametral; i las otras dos proyecciones se obtienen eliminando alternativamente y, z, entre la ecuacion del plano i la de la superficie.

Resolviendo tambien la ecuacion en y i en z, ó simplemente haciendo en el valor de x los cambios de letras que la simetría indica, se hallarán otros dos planos diametrales . . $By+A'z+C'x+B''=0$, $Cz+A'y+B'x+C''=0$; i como las ecuaciones de los tres son las mismas de condicion de las coordenadas del centro ((8) Leccion 40), se reconoce que pasan todos en efecto por el centro, cuando le hai. Las tres proyecciones de las intersecciones de estos otros dos planos con la superficie se obtendràn del mismo modo que las anteriores: unas i otras son curvas del 2.º grado, i de igual especie la proyeccion i la interseccion.

Desde luego aparece que estas superficies tienen curvas del 2.º grado por jeneratrices, i que tendrán propiedades análogas á las de dichas curvas.

Partiendo de las ecuaciones (L) i (N), obtenidas en la Leccion anterior como las reducidas mas sencillas de las dos clases jenerales de superficies del 2.º grado, con centro i sin él, van á separarse sus especies, i á examinarse sumariamente sus caracteres i propiedades notables.

1.º—*Superficies con centro.* Ecuacion jeneral; . . $Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q$ . . . (A).

Se supondrá Q positivo en el 2.º miembro, pues si no lo fuese se cambiarian todos los signos en la ecuacion. En este concepto, para que (A) represente una superficie real, no pueden ser negativos á un tiempo M, N i P: segun lo cual, resultan con signos esplícitos tres diversas especies; á saber;

$Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q$ . . (1); $Mx^2+Ny^2-Pz^2=Q$ . . (2); $Mx^2-Ny^2-Pz^2=Q$ . . (3).

Todas estan referidas á cualesquiera planos diametrales conjugados: se les supondrá *principales*, esto es, rectangulares entre sí. Divididas (1), (2) i (3) por Q, en virtud del principio de homojeneidad i haciendo $\frac{M}{Q}=\frac{1}{a^2}$, $\frac{N}{Q}=\frac{1}{b^2}$, $\frac{P}{Q}=\frac{1}{c^2}$, tomarán esta forma;

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \ldots (1'); \quad b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \ldots (2');$$
$$b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2 \ldots (3').$$

Especie 1;ª (1), (1'). Elipsoide; (Fig. 125). } Corta á los tres ejes, á las distancias del oríjen $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$; en los seis puntos a, a', b, b', c, c'. Se supondrá $a>b>c$.

Haciendo sucesivamente $z=0$, $y=0$, $x=0$, se obtienen sus intersecciones con los planos de proyeccion, llamadas *secciones principales*; todas tres elipses. Con el XY la . . $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $(aba'b')$; con el XZ la . . $a^2z^2+c^2x^2=a^2c^2$, $(aca'c')$; i con el YZ la . . $b^2z^2+c^2y^2=b^2c^2$, $(bcb'c')$.

Cortado por planos paralelos á los de proyeccion da elipses, semejantes en cada sistema, hasta los límites $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$, en que seis planos tanjentes, paralelos de dos en dos, encierran la superficie: i siéndolo por cualquier plano . . $x=my+nz+q$, tambien da elipse; pues eliminada x entre esta ecuacion i (1'), la proyeccion en el plano YZ de la interseccion es . . . .

$(b^2c^2m^2 + a^2c^2)\,y^2 + 2b^2c^2mnyz + (b^2c^2n^2 + a^2b^2)\,z^2 + \ldots = 0$, en donde . . .

$B^2 - 4AC = -4a^2b^2c^2(a^2 + b^2m^2 + c^2n^2)$, cantidad negativa.

Es un *elipsoide* referido al centro i á sus tres *ejes*, *mayor* $2a$, *mediano* $2b$, i *menor* $2c$, cuyos estremos se llaman *vértices*. Siendo iguales dos semiejes, vgr. $b = c$, el elipsoide es de revolucion sobre el otro eje: i si $a = b = c$, es una esfera.

La forma (1′) de la ecuacion no altera, referida á ejes conjugados oblicuos. Entonces a, b, c representarán semi-diámetros conjugados oblicuos, con magnitudes diversas.

La ecuacion del plano tanjente en un punto (x', y', z'), deducida por el método jeneral, es (Leccion 40); . . $b^2c^2xx' + a^2c^2yy' + a^2b^2zz' = a^2b^2c^2$ (B). Se reconoce que es paralelo al plano diametral conjugado del diámetro que pasa por el punto de contacto, considerando á este diámetro como uno de los ejes conjugados á que puede estar referida (1′). Si se le toma, vgr, por eje de las z, será $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = c$; i la ecuacion (B) se reduce á $z = c$, plano paralelo al XY que es el conjugado del eje OZ.

Siendo $(\alpha, \mathcal{E}, \gamma)$ el vértice de un cono tanjente al elipsoide, la ecuacion del plano de la curva de contacto es . . $b^2c^2\alpha x' + a^2c^2\mathcal{E}y' + a^2b^2\gamma z' = a^2b^2c^2$ . . (B′), jeneralizadas x', y', z'. Si se designa ahora por eje de las z el diámetro que prolongado pasa por el vértice del cono, será $\alpha = 0$, $\mathcal{E} = 0$, i (B′) queda en . . $z = \frac{c^2}{\gamma}$; representando un plano paralelo al conjugado XY, que corta al eje OZ á la distancia $\frac{c^2}{\gamma}$ del oríjen. Por ser esta distancia independiente de α i $\mathcal{E}$, se deduce «que si diversos conos tanjentes tienen sus vértices en un mismo plano, los planos de las curvas de contacto se cortan en un mismo punto del diámetro conjugado del plano diametral paralelo.» En el caso de estar los vértices en una misma recta, «los planos de las curvas de contacto se cortarian en la cuerda de union de los puntos de contacto de los dos planos tanjentes que pueden hacerse pasar por la misma recta.»

Si tres planos rectangulares que forman un ángulo triedro, se mueven conservàndose siempre tanjentes á un elipsoide, el vértice del ángulo describirá una esfera concéntrica con la superficie, i cuyo radio es la diagonal del paralelepípedo de los semiejes, ó $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$. Por el análisis se demuestra este teorema, correlativo con la propiedad de las tanjentes perpendiculares en la elipse (fin de la Leccion 23); i su verdad se reconoce sin esfuerzo para el elipsoide de revolucion.

Concibiendo que sobre el eje mediano $2b$ jira el plano de una de las secciones principales que le contienen, se advierte que puede tomar dos posiciones, simétricas con respecto al plano XY, en que el otro eje de la respectiva elipse iguale á $2b$, convirtiéndose dicha seccion en círculo. Para el ángulo θ, del plano de esta seccion circular con el XY, se encuentra . . $tanj.\,\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}\right)}$ (*). Todas las secciones paralelas seràn tambien círculos; de manera que «el elipsoide, no siendo de revolucion, puede ser cortado por dos sistemas diversos de planos paralelos que den secciones circulares;» las cuales son perpendiculares á la seccion principal de los ejes mayor i menor, i tienen en dos diámetros de ella sus centros. Esta propiedad es comun á todas las superficies de 2.° órden, esceptuado el *paraboloide hiperbólico*.

Para que una esfera corte en uno ó dos círculos á un elipsoide, deberá tener su centro en el plano de los ejes mayor i menor. Cortándolo en dos círculos, estos no pueden ser paralelos por cuanto la recta que une sus centros es oblicua, i corresponderán por tanto á los dos sistemas diversos. Dos círculos cualesquiera, de ambos sistemas, pertenecen á una misma esfera, cuyo centro es el punto de concurso de las perpendiculares bisectrices de sus diámetros situados en el mismo plano $(2a, 2c)$. Si uno de los

---

(*) Se ejecuta el cálculo sustituyendo por x, y, z en (1′) los valores (D), Leccion 38, para hallar la ecuacion de la interseccion del elipsoide con un plano secante cualquiera que pasa por el centro, i determinando luego los ángulos φ i θ por la condicion de ser la seccion *círculo*, que da dos ecuaciones: resulta $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, es decir, que el plano secante debe contener al eje OY. Tambien pudiera combinarse con la ecuacion (1′) la de un plano $mx + nz = 0$ que pasa por el mismo eje OY, eliminando $z = -\frac{m}{n}x = x\,tanj.\,\theta$; emplearse luego las fórmulas (D) haciendo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, para tener la ecuacion de la seccion en el plano secante; i determinarse en fin el ángulo θ por la condicion indicada.

dos círculos se redujese á un punto, la esfera seria secante i tanjente: i cuando una esfera corta i toca á un elipsoide, la seccion es un círculo.

Demuéstrase—«Que en el elipsoide, la suma de los cuadrados de tres diámetros conjugados cualesquiera es igual à la de los cuadrados de los tres ejes; i que el paralelepípedo construido sobre los diámetros conjugados es equivalente al de los ejes.»

Lo 1.°—Sea (Fig. 126) $OXYZ$ el sistema de los ejes; $OX'Y'Z'$ un sistema de diámetros conjugados al cual se supondrá referida la ecuacion $(1')$; a', b', c' los semidiámetros; i OX'' la interseccion del plano $X'Z'$ con el XY.

Conservando como eje coordenado el diámetro OY' (b'), cámbiese la direccion de los otros dos en el plano $X'Z'$, siendo uno de los nuevos conjugados OX'', i el otro OZ''. En la elipse $a'a''c'c''$ es; . .

$$a'^2+c'^2=a''^2+c''^2\ \ldots\ (\mathrm{m}).$$

Sea OY'' la interseccion del plano $Y'Z''$ con el XY. Conservando ahora el eje OX'' (a''), i cambiando en $Y'OZ''$ la direccion de los ejes de modo que sea nuevo diámetro OY'', su conjugado será OZ, porque OX, OY, OX'', OY'', están en un mismo plano. De aqui resulta, en la elipse $b'b''c''c$; . . . .

$$b'^2+c''^2=b''^2+c^2\ \ldots\ (\mathrm{n}).$$

I para OZ (c) como eje conjugado comun, la elipse $aa''bb''$ da; . . $a''^2+b''^2=a^2+b^2$ . . (p).

Sumadas (m), (n) i (p), se obtiene: . . $a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$; i . . $4(a'^2+b'^2+c'^2)=4(a^2+b^2+c^2)$.

Lo 2.°—Designando por $vol.(a', b', c')$, $vol.(a, b, c)$ &c los paralelepípedos formados sobre las tres aristas a', b', c', sobre a, b, c, &c, las sucesivas trasformaciones hechas dan; ....

$Vol.(a', b', c')=vol.(a'', b', c'')$ . . (m'); porque estos dos paralelepípedos tienen una arista comun b', i los paralelógramos de las otras dos, a', c' i a'', c'', existen en un mismo plano i son equivalentes.

$Vol.(a'', b', c'')=vol.(a'', b'', c)$ . . (n'); $vol.(a'', b'', c)=vol.(a, b, c)$ . . (p'); por razones semejantes.

Por tanto, de una igualacion en otra; . . $vol.(a', b', c')=vol.(a, b, c)$; i . . $8vol.(a', b', c')=8vol.(abc)$.

El volùmen del elipsoide puede considerarse equivalente á los dos tercios del cilindro circunscrito, tanjente en una de sus secciones principales; por induccion de lo demostrado en la jeometría con respecto á la esfera. El volúmen del cilindro indicado es $2\pi abc$: i se advierte que equivale á cualquier otro cilindro circunscrito, demostrada como ha sido la equivalencia de todos los paralelepípedos conjugados.

Especie 2;ª (2), (2'). HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA; (Fig. 127) } Las *secciones principales*, ó intersecciones de la superficie con los planos diametrales principales, i que se obtienen haciendo sucesivamente $z=0$, $y=0$, $x=0$, son; con el XY la elipse . . $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $(aba'b')$; con el XZ la hipérbola $a^2z^2-c^2x^2=-a^2c^2$, $(amn, a'm'n')$; i con el YZ la hipérbola . . $b^2z^2-c^2y^2=-b^2c^2$, $(bde, b'd'e')$.

Los ejes OX, OY cortan á la superficie, á las distancias $x=\pm a$, $y=\pm b$ del centro; i $2a$, $2b$ son los ejes trasversos. El eje OZ no la corta, pues haciendo en $(2')$ $x=0$, $y=0$, resulta $z=\pm c\sqrt{-1}$; pero á la magnitud $2c$ se la llama *eje no trasverso* ó imajinario. *Vértices*, los cuatro puntos a, a', b, b'. Sea $a>b$ para el hiperboloide en jeneral: cuando $a=b$, será de revolucion sobre el eje OZ.

Las secciones paralelas al plano XY, que se hallan haciendo $z=\pm e$, son todas elipses semejantes, que se ensanchan creciendo e; mayores que la $aba'b'$, llamada *elipse del cuello*. Las paralelas á los planos XZ, YZ son hipérbolas; con las ramas ácia arriba i ácia abajo cuando los planos secantes son . . $y=\pm e>b$, $x=\pm e>a$; con ellas en sentido lateral para $y=\pm e<b$, $x=\pm e<a$; i que cuando $y=\pm b$, $x=\pm a$, se reducen á dos rectas, . . $x=\pm\frac{a}{c}z$, ó . . $y=\pm\frac{b}{c}x$, en cuyos casos los planos secantes son tambien tanjentes á la superficie en los vértices b, b', a, a'.

La superficie da secciones elípticas, hiperbólicas i parabólicas; pues cortada por un plano cualquiera . . . . $x=my+nz+q$, el carácter B^2-4AC de la proyeccion de la seccion en el plano YZ es . . . $4a^2b^2c^2(a^2+b^2m^2-c^2n^2)$, que representa elipse, hipérbola ó parábola segun fuere negativo, positivo ó nulo el factor $a^2+b^2m^2-c^2n^2$.

Como la ecuacion $(2')$ es la misma para cualesquiera diámetros conjugados, dos de los de cualquier sistema son trasversos, i el otro no trasverso, ó imajinario.

Pásase de $(1')$ á $(2')$ cambiando c^2 en $-c^2$, ó c en $c\sqrt{-1}$; i por este medio algunas propiedades de esta superficie pudieran deducirse de las del elipsoide.

Si el plano de la elipse $aa'bb'$ jira sobre el eje mayor trasverso aa', se concibe que puede tomar de dos maneras una posicion tal que, creciendo el otro eje bb' iguale al aa', i la seccion se convierta en círculo; siendo tambien círculos las secciones paralelas de estos dos sistemas. Esto sucederá cuando para la inclinacion del plano secante con el XY se tenga . . $tanj.\,\theta = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\right)}$; valores nulos para el hiperboloide de revolucion, en que $a=b$. (Véase la nota (*)).

Segun lo dicho al fin de la Seccion 5,ª (Leccion 40), la ecuacion . . $b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0$ representa el cono asintótico de esta superficie, cuyo vértice es el centro. Por ser los valores de $tanj.\,\theta$ dependientes solo de los coeficientes de $x^2, y^2, z,^2$ aparece que los dos sistemas de planos paralelos secantes que dan círculos en la superficie dan círculos tambien en el cono asintótico: de modo que, si se considerase como base ó directriz del cono á un círculo del un sistema, los del otro serian las secciones *antiparalelas*. (Leccion 34). En jeneral, las secciones hechas por un mismo plano secante en la superficie i en el cono asintótico son de igual especie: i las correlativas de ramas infinitas serán asintóticas una de otra.

Siendo $a=b$, el cono asintótico seria . . $c^2x^2+c^2y^2-a^2z^2=0$; tambien de revolucion.

El plano tanjente en cualquier punto (x', y', z') es . . $b^2c^2xx'+a^2c^2yy'-a^2b^2zz'=a^2b^2c^2$: paralelo al diametral conjugado del diámetro que pasa por el punto de contacto. Si se supone ser este diámetro uno de los conjugados á que esté referida (2′), vgr. el eje OY, será $x'=0$, $z'=0$, $y'=b$, i el plano tanjente es . . $y=b$, que corta à la superficie en dos rectas $\left(x=\pm\frac{a}{c}z,\ y=b\right)$. Téngase en cuenta que aqui representan a, b, c cualesquiera semidiámetros conjugados.

Resulta—«Que por cualquier punto del hiperboloide de una hoja pueden pasar dos rectas íntegramente coincidentes con la superficie.» El plano de las dos rectas será perpendicular al de la elipse del cuello, si en esta se toma el punto. Las proyecciones de cualesquiera de dichas rectas son tanjentes à las proyecciones de la misma elipse.

I resulta asimismo—«Que esta superficie puede ser enjendrada de dos maneras diferentes por el movimiento de una línea recta;» la cual variará constantemente de direccion i de plano, regulado su movimiento por la condicion de apoyarse en tres directrices. Es verdad perceptible, i que confirma el análisis, que ninguna jeneratriz corta á otra de su mismo sistema, i que cualquiera de las del un sistema corta á todas las del otro sucesivamente, encontrando una en cada uno de sus puntos; como tambien «que el cono asintótico es lugar jeométrico de todas las paralelas que pueden tirarse por el centro del hiperboloide à las jeneratrices de ambos sistemas.» Una recta que se mueve apoyándose en tres rectas tales, que no haya dos de ellas en un mismo plano, enjendra un hiperboloide de una hoja.

La doble jeneracion indicada coloca á esta superficie en el número de las llamadas *superficies gauchas*; que son *regladas* como las *desarrollables*, pero nó aplicables como estas por desarrollo en un plano; i que se consideran enjendradas por una recta que en su movimiento varía constantemente de plano. Puede sujetarse á la jeneratriz á apoyarse en tres líneas directrices; ó en dos solamente, pero conservándose paralela à un plano director.

Por el método de las trasformaciones sucesivas empleado para el elipsoide, ó cambiando solo c^2 en $-c^2$ en el resultado que para él se obtuvo, se demuestra que en el hiperboloide es . . . . $a'^2+b'^2-c'^2=a^2+b^2-c^2$, i $vol.(a', b', c')=vol.(a, b, c)$; siendo a', b', c' cualesquiera semidiámetros conjugados, i a, b, c los semiejes.

LECCION 43.

Superficies de segundo órden.—(*Conclusion.*)

Especie 3.ª de superficies con centro—HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS. (Fig. 128).

Su ecuacion; . . $Mx^2-Ny^2-Pz^2=Q$ . . (3); ó bien . . $b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$ . . (3′)

Buscando las intersecciones de esta superficie con los ejes, se encuentra para el OX.. $x=\pm a$; para el OY.. $y=\pm b\sqrt{-1}$; i para el OZ.. $z=\pm c\sqrt{-1}$; de manera que solo el eje de las x la corta, en los dos *vértices* a, a', equidistantes del centro la magnitud a. Llámase sin embargo á $2a$, $2b$, $2c$, ejes ó diámetros principales de la superficie en el sistema único de ejes rectangulares, i diámetros conjugados oblicuos en un sistema oblicuo; siendo solo el primero eje ó diámetro trasverso, i los otros dos no trasversos ó imajinarios.

$z=0$; .. $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$. *Hipérbola*; seccion principal (aee', $a'dd'$) en el plano XY.

$y=0$; .. $a^2z^2-c^2x^2=-a^2c^2$. *Hipérbola*; seccion principal (amm', $a'nn'$) en el plano XZ.

$x=0$; .. $c^2y^2+b^2z^2=-b^2c^2$. Elipse imajinaria. No corta á la superficie el plano YZ.

$x=e$; .. $a^2(c^2y^2+b^2z^2)=b^2c^2(e^2-a^2)$. Secciones paralelas al plano YZ; que serán *elipses* reales cuando sea $e>a$, como vgr. $e=Os$, que da la elipse $eme'm'$; serán *puntos* (los vértices), cuando $e=a$; i elipses imajinarias, esto es, nada, cuando $e<a$.

Si $b=c$, el hiperboloide es de revolucion sobre el eje trasverso. Si se supusiese que la hipérbola (amm', $a'nn'$) i su conjugada se movian à un tiempo como jeneratrices al rededor de aa', la 1.ª formaria el hiperboloide de dos hojas i la 2.ª un hiperboloide de una hoja, su conjugado, que tendrian un mismo cono asintótico, i tambien unos mismos ejes i diámetros, pero trasversos de la una superficie los no trasversos de la otra. Las dos quedarian comprendidas en la ecuacion ... $b^2x^2\mp a^2y^2-a^2z^2=a^2b^2$; i serian tambien conjugadas, sin ser de revolucion, las dos de esta; ... $b^2c^2x^2\mp a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$.

De la ecuacion (1′) del elipsoide se pasa á la (3′) cambiando b^2 en $-b^2$, i c^2 en $-c^2$; i de la (2′) del hiperboloide de una hoja cambiando b^2 en $-b^2$: así pues, las propiedades de esta superficie pueden deducirse analíticamente de las de las otras dos. Segun esto, de lo dicho para el otro hiperboloide en la Leccion anterior resulta que este da tambien secciones planas elípticas, hiperbólicas i parabólicas.

Dos planos que pasen por el mayor de los ejes imajinarios, i sus paralelos, dan secciones circulares, si para el ángulo θ que forman con el plano del mismo eje i del eje trasverso se tiene ... $tanj.\,\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}\right)}$. Esta fórmula supone $2b>2c$; i *àng.* θ con el plano XY.

La ecuacion del plano tanjente es ... $b^2c^2xx'-a^2c^2yy'-a^2b^2zz'=a^2b^2c^2$: es simplemente tanjente en un punto.

La del cono asintótico, su vértice el centro; ... $b^2c^2x^2-a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=0$. Las secciones hechas por un mismo plano en la superficie i en el cono asintótico son de igual especie.

De lo dicho para las otras dos superficies con centro se deduce que para el hiperboloide de dos hojas existen entre los semiejes a, b, c i tres semidiámetros conjugados cualesquiera, a', b', c', las relaciones; ... $a'^2-b'^2-c'^2=a^2-b^2-c^2$; i .. $vol.\,(a',b',c')=vol.\,(a,b,c)$.

Para los dos hiperboloides habrá tambien esferas concéntricas, cuyas superficies sean «lugar jeométrico de los vértices de los triedros rectangulares tanjentes al hiperboloide respectivo.» El radio de la esfera será para el hiperboloide de una hoja $\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$, i para el de dos hojas $\sqrt{(a^2-b^2-c^2)}$; i como podrá ser imajinario, porque sea negativo el trinomio contenido en el radical, entonces la esfera resultará imajinaria. Corresponde esta propiedad á la de las tanjentes perpendiculares en la hipérbola, Leccion 28, i su verdad es bien perceptible para los hiperboloides de revolucion.

2.º – *Superficies sin centro.* Su ecuacion reducida jeneral, que se dedujo en la Leccion 41, es de la forma ... $Ny^2+Pz^2+Qx=0$ .. (B). Se la supondrá referida á ejes rectangulares.

Suponiendo Q positiva en el 2.º miembro, i x positiva, la ecuacion (B) admite estas dos formas con signos esplícitos; ... $Ny^2+Pz^2=Qx$ .. (4); $Ny^2-Pz^2=Qx$ .. (5). Si fuese Q negativa, se cambiarian los signos á la ecuacion; i si lo fuese x, se cambiaria en $-x$, lo cual no alteraba la especie sino la posicion de las respectivas superficies.

Recuérdese que hai infinitos sistemas de ejes oblicuos, i uno solo de ejes rectangulares, con respecto á los cuales puede tomar la forma (B), que es la (N) de la Leccion 41, la ecuacion de las superficies sin centro.

Especie 1.ª; (4). PARABOLOIDE ELÍPTICO; (Fig. 129.) } Corta solamente en el oríjen O á los tres ejes.

$z=0$; .. $y^2=\frac{Q}{N}x=2px$. *Paràbola* (aOa'); seccion principal en XY; .. $\frac{Q}{N}=2p$; .. $N=\frac{Q}{2p}$ .. (a)

$y=0$; .. $z^2=\frac{Q}{P}x=2p'x$. *Paràbola* (bOb'); seccion principal en XZ; .. $\frac{Q}{P}=2p'$; .. $P=\frac{Q}{2p'}$ .. (b)

Estas dos parábolas principales tienen comun el vértice O i el eje OX, i sus parámetros $2p$, $2p'$ son de un mismo signo, ambos positivos. Poniendo en (4) los valores (a) i (b), queda;

$p'y^2+pz^2=2pp'x$ .. (4'). El paraboloide en funcion de los parámetros principales.

$x=0$; .. $Ny^2+Pz^2=0$. El punto de oríjen; seccion principal en YZ.

La superficie no existe sino de un solo lado del plano YZ, que la toca en el *vértice O*, i se estiende indefinidamente del lado de las x positivas.

$x=a$; .. $Ny^2+Pz^2=Qa$. Secciones paralelas á YZ, en que $a>0$; elipses semejantes, que se ensanchan indefinidamente creciendo a. Si $a=Os$, la elipse será $aba'b'$.

$y=b$; .. $Pz^2-Qx+Nb^2=0$. Secciones paralelas á XZ; parábolas semejantes.

$z=c$; .. $Ny^2-Qx+Pc^2=0$. Secciones paralelas á XY; parábolas semejantes.

Todas las secciones que pasan por el eje OX del paraboloide, ó le son paralelas, son parábolas; i todas las no paralelas al eje, son elipses. Basta para reconocerlo cortar la superficie por un plano cualquiera, $z=mx+ny+q$, i hallar la proyeccion de la seccion en XY; pues esta será elipse, esceptuado el caso de $m=0$ que da parábola.

Suponiendo $p>p'$, dan secciones circulares dos planos que pasen por OY, i sus paralelos, si para el ángulo θ que formen con el plano XY se tiene; ... $sen\,\theta=\pm\sqrt{\frac{p'}{p}}$; ó $tanj.\,\theta=\pm\sqrt{\left(\frac{p'}{p-p'}\right)}$

Cuando $p=p'$, $sen\,\theta=0$. Las secciones principales parabólicas son iguales, las secciones perpendiculares al eje son círculos, i el paraboloide es de revolucion. Su ecuacion modificada será.. $y^2+z^2=2px$.

Asignando un valor comun á x en las ecuaciones de las dos parábolas principales, se obtiene; ... $y^2 : z^2 :: p : p'$.

La ecuacion del plano tanjente en cualquier punto (x', y', z') es; .. $p'y'y+pz'z=pp'(x-x')$.

$z=0$; ... $y'y=p(x-x')$. Interseccion con el plano XY; independiente de z' i p'.

$y=0$, $z=0$; ... $x=x'$. Corta al eje OX á una distancia del oríjen igual á la x' del punto de contacto.

Para un cono tanjente cuyo vértice sea el punto $(\alpha, \varepsilon, \gamma)$, la curva de contacto estará situada en el plano ... $pp'x'+p'\varepsilon y'+p\gamma z'-pp'\alpha=0$, cuyas coordenadas jenerales son x', y', z'; i será elipse ó parábola.

«Cortado el paraboloide elíptico por un plano perpendicular al eje, el volúmen del segmento equivale á la mitad del cilindro circunscrito.» Enunciamos simplemente esta proposicion, sin poder ofrecer su demostracion rigorosa que pertenece al cálculo integral.

Especie 2.ª PARABOLOIDE HIPERBÓLICO; (Fig. 130) ... $Ny^2-Pz^2=Qx$ .. (5). No corta á los tres ejes sino en el oríjen.

$x=0$; ... $Ny^2-Pz^2=0$. Seccion principal en el plano YZ. *Dos rectas* que se cortan en el oríjen, simétricas con respecto á los dos ejes OY, OZ.

$z=0$; ... $y^2=\frac{Q}{N}x=2px$. Una *paràbola* (aOa'); seccion en XY } $\frac{Q}{N}=2p$; .. $N=\frac{Q}{2p}$ .. (c).

$y=0$; ... $z^2=-\frac{Q}{P}x=-2p'x$. Otra *paràbola* (bOb'); seccion en XZ } $\frac{Q}{P}=2p'$; .. $P=\frac{Q}{2p'}$ .. (d).

Estas dos parábolas tienen vértice comun en el oríjen, i sus ejes están situados en OX, en direcciones opuestas, por tener x contrarios signos: los dos parámetros, $2p$, $2p'$, son positivos. Se forma idea cumplida de la superficie, considerándola enjendrada por una de las dos parábolas que se moviese paralelamente á sí misma, conservando el vértice en la otra.

Llevando á (5) los valores (c) i (d), se obtiene; ... $p'y^2-pz^2=2pp'x$ .. (5'). Es la ecuacion del paraboloide hiperbólico en funcion de los dos parámetros.

Puede pasarse de (4') á (5') cambiando el signo á p'; i de esta manera se deducirian de las propiedades de la una superficie algunas propiedades de la otra.

$x=\pm a$; .. $p'y^2-pz^2=\pm 2app'$. Secciones paralelas á YZ. Separando los signos en el 2.º miembro, son dos sistemas de hipérbolas semejantes; uno del lado de las x positivas, como la (cmm', $c'nn'$) que

corresponde á $x = Or$; i otro del lado de las x negativas, como la $(ebb', e'dd')$ que corresponde á $x = -Ot$. Las ramas de las curvas están en sentido diverso, del un sistema al otro; i puede llamárseles sistemas conjugados, pues que unas i otras curvas tienden á coincidir por ángulos diversos con las dos rectas de la seccion por el oríjen, á medida que los planos secantes se acercan al YZ. Si $p = p'$, todas las hipérbolas serian equiláteras.

Combinando la ecuacion (5') con la de un plano secante cualquiera $z = mx + ny + q$, para hallar la proyeccion de la seccion en XY, resulta ser ella siempre hipérbola, i serlo por consiguiente la seccion misma, mientras tenga valor m, i parábola cuando $m = 0$. De modo que, son parábolas las secciones paralelas al eje OX, aunque no lo sean entre sí, é hipérbolas cualesquiera otras; sin que esta superficie dé seccion elíptica. Lo mismo se encuentra buscando la ecuacion de la seccion en el plano secante, por medio de las fórmulas (D), Leccion 38: i tambien se advierte que los valores de *sen.* θ i de *tanj.* θ deducidos para el otro paraboloide son imajinarios cambiado el signo á p', segun lo cual no hai ahora secciones circulares.

Ciertos planos paralelos al eje OZ, pero no entre sí, dan tambien por seccion dos rectas, que son caso particular de la hipérbola; como se deduce del siguiente procedimiento analítico.

Sea $y = mx + n$ .. (A) la ecuacion de un plano paralelo á OZ. Si puede cortar segun dos rectas á la superficie, la eliminacion de x entre (A) i (5') dará una ecuacion del 2.° grado descomponible en dos factores reales de primer grado, proyecciones de las rectas en el plano YZ. La ecuacion resultante es; ...

$$my^2 - 2py + 2pn - \frac{mpz^2}{p'} = 0 \text{ .. (B)}.$$

Es necesario que en (B) los tres primeros términos constituyan un cuadrado perfecto, para que tenga la forma... $M^2 - N^2 = 0$, apropiada á la descomposicion.

Comparando pues con .. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, será; .. $my^2 = a^2$; $2py = 2ab$; $2pn = b^2$.

Lo cual da por término 1.° de la raiz binomia .. $y\sqrt{m}$; i por 2.° .. $\frac{2py}{2y\sqrt{m}} = \frac{p}{\sqrt{m}}$

I .. $2pn = \frac{p^2}{m}$; de donde .. $n = \frac{p}{2m}$; valor del término independiente de la ecuacion (A) del plano secante, que satisface a la condicion presupuesta.

La sustitucion en (A) produce; .. $y = mx + \frac{p}{2m}$; ó bien .. $2my = 2m^2x + p$ .. (A').

I la (B) será; ... $\left(y\sqrt{m} - \frac{p}{\sqrt{m}}\right)^2 - \frac{mpz^2}{p^2} = 0$; ó bien .. $(my - p)^2 - \frac{m^2pz^2}{p'} = 0$ .. (B').

Descompuesta (B') en sus dos factores, igualándolos á cero, i combinándolos separadamente con (A'), los pares de ecuaciones de cada una de las dos rectas son;

$$(C)\begin{cases} 1.^a; \ldots y = mx + \frac{p}{2m}; \ldots my - p - mz\sqrt{\frac{p}{p'}} = 0, \text{ ó bien } \ldots y = z\sqrt{\frac{p}{p'}} + \frac{p}{m}. \\ 2.^a; \ldots y = mx + \frac{p}{2m}; \ldots my - p + mz\sqrt{\frac{p}{p'}} = 0, \text{ ó bien } \ldots y = -z\sqrt{\frac{p}{p'}} + \frac{p}{m}. \end{cases}$$

Estas dos rectas coinciden pues íntegramente con la superficie del paraboloide hiperbólico, i el plano secante que las contiene es ademas tanjente en el punto en que ellas se cortan. Dando á m una serie de valores continuos, se tendrán dos series correlativas de rectas coincidentes con la superficie i que se cortan en ella de dos en dos. «La superficie puede ser enjendrada de dos maneras por una línea recta; á saber, tomando ella las sucesivas posiciones de la una serie, ó las de la otra.»

Los coeficientes de z en las dos series son constantes; independientes de las variaciones de m: i por tanto, todas las jeneratrices de un mismo sistema tienen proyecciones paralelas en el plano YZ, lo cual indica que ellas no se cortan. Pero cualquiera jeneratriz del un sistema corta á todas las del otro; pues combinando el primer par de las ecuaciones (C) con estas ... $y = m'x + \frac{p}{2m'}$, $y = -z\sqrt{\frac{p}{p'}} + \frac{p}{m'}$, que representan una recta cualquiera de la otra serie, la eliminacion de x entre las dos proyecciones en XY, i la de z entre las en YZ, dan para y un mismo valor, que es ... $y = \frac{p(m'+m)}{2mm'}$.

Las jeneratrices del primer sistema son todas paralelas al plano . . $y = z\sqrt{\frac{p}{p'}}$; i las del 2.° lo son al plano . . . $y = -z\sqrt{\frac{p}{p'}}$, que se llaman *planos directores*, i que pasan ambos por el eje OX. Este paraboloide es segun lo dicho «superficie reglada *gaucha*, de las del 2.° sistema de jeneracion indicado al fin de la Leccion precedente.»

Cambiando p' en $-p'$ en las ecuaciones (C), las referentes al plano YZ son rectas imajinarias; de donde se infiere que el paraboloide elíptico no admite secciones rectilíneas.

La ecuacion jeneral del plano tanjente en un puuto (x', y', z') es; . . $p'y'y - pz'z = pp'(x + x')$.
Eliminada x entre esta ecuacion i la $(5')$, viene; . . $p'(y^2 - 2y'y) - p(z^2 - 2z'z) = -2pp'x'$.
Agregando á ambos miembros $p'y'^2 - pz'^2$, el 2.° es nulo, i queda; . . $p'(y - y')^2 - p(z - z')^2 = 0$.

Se descompone en dos factores reales; . . $y - y' = (z - z')\sqrt{\frac{p}{p'}}$; $y - y' = -(z - z')\sqrt{\frac{p}{p'}}$.

Son las proyecciones en el plano YZ de dos rectas, intersecciones del plano tanjente con la superficie: se vé que ellas pertenecen á las dos series de arriba. Lo mismo se encontrará para las dos rectas . . $Ny^2 - Pz^2 = 0$, seccion principal en el plano YZ, poniendo por N, P sus valores en funcion de los parámetros.

Como las cuatro primeras superficies analizadas dan diversos sistemas paralelos de secciones elípticas semejantes, todas ellas admiten por jeneratriz á una elipse de dimensiones variables.

FIN DE LA PARTE SEGUNDA.

Helguera Collection

PAMPHLETS

Number: P- 1141

Author: Pombo, Lino de

Title: Lecciones de Jeometria Analitica, por...Profesor de Matematicas en el Colejio Militar de Bogotá..

Place of Publication: Bogotá

m

Publisher: Imprenta de "El Día", por J. Ayarza

Date: 1850

Dimensions: 31 2/10 x 22 3/10 cms; (+3) 1-127pp + 6 fold out engravings

Condition: Pages 119-127 show foxing, remainder, in nearly mint condition

General Notes: Dedicated by Pombo to Dr Jose Manuel Restrepo, these Lessons in analytical geometry are prob ably the most sophisticated math text to appear in Colombia up to that time--designed for instructional use in the Colegio Militar of Bogotá.

JT img 841-881, 883-919-983

helguera_p_1141_

041 ✓	p. 31	001 ✓	front cover
042 ✓	32 (foldout)	002 ✓	inside f.c.
043 ✓	33	003 ✓	half t.p.
044 ✓	34	004 ✓	half t.p. verso
045 ✓	35	005 ✓	t.p.
046 ✓	36	006 ✓	t.p. verso
047 ✓	37	007 ✓	[i]
048 ✓	38	008 ✓	[ii]
049 ✓	39	009 ✓	[iii]
050 ✓	40	010 ✓	[iv]
051 ✓	41	011 ✓	[1]
052 ✓	42	012 ✓	2
053 ✓	43	013 ✓	3
054 ✓	44	014 ✓	4
055 ✓	45	015 ✓	5
056 ✓	46	016 ✓	6
057 ✓	47	017 ✓	7
058 ✓	48	018 ✓	8
059 ✓	49	019 ✓	9
060 ✓	50	020 ✓	10
061 ✓	51	021 ✓	11
062 ✓	52	022 ✓	12 (foldout)
063 ✓	53	023 ✓	13
064 ✓	54	024 ✓	14
065 ✓	55	025 ✓	15
066 ✓	56	026 ✓	16
067 ✓	57	027 ✓	17
068 ✓	58	028 ✓	18
069 ✓	59	029 ✓	19
070 ✓	60 (foldout)	030 ✓	20
071 ✓	61	031 ✓	21
072 ✓	62	032 ✓	22
073 ✓	63	033 ✓	23
074 ✓	64	034 ✓	24
075 ✓	65	035 ✓	25
076 ✓	66	036 ✓	26
077 ✓	67	037 ✓	27
078 ✓	68	038 ✓	28
		039 ✓	29
		040 ✓	30

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/

JT

helguera_p_1141_

		079 ✓	p. 69
		080 ✓	70
119 ✓	p. 109	081 ✓	71
120 ✓	110	082 ✓	72 (foldout)
121 ✓	111	083 ✓	73
122 ✓	112	084 ✓	74
123 ✓	113	085 ✓	75
124 ✓	114	086 ✓	76
125 ✓	115	087 ✓	77
126 ✓	116	088 ✓	78
127 ✓	117	089 ✓	79
128 ✓	118	090 ✓	80
129 ✓	119	091 ✓	81
130 ✓	120	092 ✓	82
131 ✓	121	093 ✓	83
132 ✓	122	094 ✓	84
133 ✓	123	095 ✓	85
134 ✓	124	096 ✓	86
135 ✓	125	097 ✓	87
136 ✓	126	098 ✓	88
137 ✓	127	099 ✓	89
138 ✓	[128] (foldout)	100 ✓	90
139 ✓	inside b.c	101 ✓	91
140 ✓	back cover	102 ✓	92 (foldout)
Notes1		103 ✓	93
Notes2		104 ✓	94
		105 ✓	95
		106 ✓	96
		107 ✓	97
		108 ✓	98
		109 ✓	99
		110 ✓	100
		111 ✓	101
		112 ✓	102
		113 ✓	103
		114 ✓	104
		115 ✓	105
		116 ✓	106
		117 ✓	107
		118 ✓	108

Free Plain Graph Paper from http://incompetech.com/graphpaper/plain/